

Dos estrategias ganadoras para la opción Banxico

Begoña Fernández,* Manuel Galán** y Patricia Saavedra***

Fecha de recepción: 27 de mayo de 2002; fecha de aceptación: 6 de febrero de 2003

Resumen: Durante el período de agosto de 1996 a junio de 2001, el Banco de México instrumentó un mecanismo de intervención en el mercado cambiario nacional, que le permitió incrementar sus reservas internacionales por un monto mayor a los 16,000 millones de dólares. El mecanismo de acumulación se basó en el diseño de un contrato opcional, cuyas características contractuales no se encontraban en las opciones exóticas existentes en el mercado. En este artículo se presenta un análisis de dicho instrumento durante su período de vigencia basado en los resultados obtenidos en Fernández y Saavedra (2003) y Galán, *et ál.* (1996), en los que se presentan dos reglas de ejercicio: una basada en el principio de la programación dinámica y el teorema de Paro Óptimo y otra en un criterio heurístico. El estudio muestra que bajo la hipótesis de que el tipo de cambio en cada tiempo tiene una distribución log-normal, las instituciones crediticias adquirieron el contrato opcional a un precio por debajo del valor estimado. Sin embargo, su política de ejercicio no fue óptima, pues de haber utilizado alguna de las reglas de ejercicio propuestas habrían obtenido una ganancia adicional.

Palabras clave: mercado cambiario, reservas internacionales, opciones, Banco de México.

Abstract: Between August 1996 and June 2001, the Central Bank of Mexico implemented an interventional mechanism in the exchange market in order to increase its international reserves by more than 16,000 millions of dollars. This mechanism consisted in a put option that gave the Mexican Banks the right, but not the obligation, to sell american dollars to the Central Bank, at the price determined one day before the date of exercise. In this work we present an analysis of the behavior of

* Departamento de Matemáticas. Facultad de Ciencias. UNAM. Circuito Exterior. Ciudad Universitaria. 04510. México, D. F. e-mail: bff@hp.fciencias.unam.mx

** Director de Sistemas Operativos y de Pagos. Banco de México. e-mail: mgalan@banxico.org.mx

*** Departamento de Matemáticas. UAM. Iztapalapa. Apdo. Postal 55-538. Av. San Rafael Atlixco 186. 09340. México, D. F. e-mail: psb@xanum.uam.mx

this instrument during its life time. Two rules of exercise are proposed to increase the gain when the option is exercised. The study shows that, under the hypothesis that the rate of exchange at time t has a log-normal distribution, the financial institutions bought the option cheap but its exercise policy was not optimal. If they had used any of the two rules of exercise proposed here they would have gotten a substantial gain.

Keywords: exchange market, international reserves, options, Banco de México.

Introducción

A raíz de los sucesos turbulentos en la economía mexicana durante los años de 1993 y 1994 que contribuyeron a la crisis financiera de 1994-1995, las reservas internacionales del Banco de México disminuyeron en forma importante. En 1996, la Comisión de Cambios consideró que era prudente aumentar el nivel de éstas sin presionar al tipo de cambio de manera indeseable y sin enviar señales que pudieran interpretarse de forma errónea por los distintos participantes del mercado. Se estimó que la disponibilidad de un monto mayor de activos internacionales contribuiría a lograr mejoras en el costo y plazo del financiamiento externo.

El esquema que se decidió adoptar dio origen a lo que se conoce hoy como la opción Banxico, que consiste en un mecanismo de intervención en el mercado cambiario. Este instrumento se parece a un contrato opcional tipo *put* sobre dólares, sin embargo, tiene otras características que lo diferencian completamente de los instrumentos existentes en el mercado tanto nacional como internacional. Este instrumento lo emite el Instituto Central mensualmente mediante subasta entre las distintas instituciones de crédito del país.

La opción Banxico es una opción exótica distinta de las que se encuentran en el mercado, ver Zhang (1998), con tiempo de maduración de un mes, en la que la fecha de ejercicio puede ser cualquiera de los días hábiles durante la vigencia del contrato; el precio de ejercicio es aleatorio y contiene una restricción de ejercicio que depende del promedio de los tipos de cambio *fix* hasta el día inmediato anterior a la fecha de ejercicio.

En este artículo se presenta un análisis de la opción Banxico durante su vigencia, de agosto de 1996 a junio de 2001, basado en los resultados obtenidos por Fernández y Saavedra (2003) y Galán, *et ál.* (1996). En la Sección I, se describe con detalle el diseño y las características de la opción; en la Sección II, bajo la hipótesis de que el tipo de cambio *fix* tiene una distribución log-normal, se presentan los resultados obtenidos por Fernández y Saavedra (2003), basados en el análisis bajo la probabilidad de riesgo-neutro, el principio de programación dinámica y el teorema de paro óptimo sobre la valuación en cada tiempo, y una regla de ejercicio inspirada en el análisis de la opción sin la restricción. Asimismo, se presenta otro criterio de ejercicio fundamentado en un método heurístico —que puede consultarse en Galán, *et ál.* (1996) y Galán (2000). En la Sección III con estos resultados y los datos tanto del tipo de cambio (pesos por dólar) *fix* como de la subasta se analiza el desempeño de la opción Banxico y se comparan las reglas de ejercicio propuestas en la Sección II.

Los resultados que se obtienen muestran que el Banco Central adquirió dólares en el mercado para sumarlos a sus reservas por una cantidad igual a 16,330 millones de dólares y que las instituciones de crédito adquirieron la opción a un precio en promedio inferior al valor estimado. Sin embargo, su política de ejercicio, bajo los supuestos realizados en este trabajo, muestra que no fue la más adecuada. De haber ejercido con alguna de las reglas propuestas habrían obtenido más de 40 millones de pesos adicionales a su ganancia.

I. Descripción y características de la opción

La opción Banxico la da a conocer el Banco de México el primero de agosto de 1996, mediante una circular dirigida a las instituciones de crédito del país, en la cual se les informa que a partir de esa fecha, cada fin de mes se subastarán contratos opcionales contra el pago de una prima en pesos, que otorgarán al tenedor del contrato el derecho más no la obligación (opción) de vender una cantidad predeterminada de dólares contra pesos al Instituto Central.

La opción Banxico perseguía en su diseño varios objetivos: el primero ciertamente era el de incrementar las reservas internacionales del Instituto Central que a finales de 1995 habían disminuido a niveles históricamente bajos. Sin embargo, la acumulación de reservas

debería realizarse de manera tal que no provocara volatilidad innecesaria en los mercados, tarea que no resultaba fácil en el mercado cambiario mexicano, en el que la poca profundidad del mismo hace que la participación o sólo sospecha de participación del Banco Central provoque movimientos cambiarios importantes.

Las intervenciones en el mercado cambiario mediante compra directa de dólares a los participantes, tiene el inconveniente de marcar niveles del tipo de cambio, interpretadas como *señales*, que a juicio del mercado significan que el Banco Central sugiere que la moneda nacional debe dejar de depreciarse. Esta reacción es correcta si lo que busca el Banco Central es modificar el nivel del tipo de cambio, como sucede en la mayoría de las intervenciones de los bancos centrales, pero no es conveniente cuando lo que busca la institución es aumentar sus reservas internacionales y dejar al mercado la libre determinación del nivel del tipo de cambio. Inclusive, una estrategia de acumulación basada en opciones tradicionales tendría el mismo problema, pues el precio de ejercicio sería interpretado por el mercado como un piso.

Por otro lado, el Banco de México buscaba aumentar la transparencia en las acciones que realizaba en materia de política cambiaria. Se perseguía, entonces, definir reglas claras que aumentarían la información y disminuirían la discrecionalidad del Instituto Central en esta materia. El reto no era fácil, se pretendía aumentar las reservas internacionales con la compra de dólares a las instituciones de crédito y al mismo tiempo, se buscaba que estas compras o acciones del Banco Central no distorsionaran el mercado mandando señales que provocarían un mercado volátil. Por último, se pretendía retirar dólares del mercado cuando éstos presentaran una franca tendencia a la apreciación —posible indicación de una entrada de dólares a la economía— y no sólo una apreciación de un día con respecto al anterior.

Para evitar una lectura incorrecta sobre las intenciones del Instituto Central, se sugirió que la acción de aumentar las reservas internacionales debería estar en manos de las instituciones de crédito y no del Banco Central. De esta manera, la estrategia de acumulación de reservas sería pasiva y totalmente dependiente de estas instituciones. El Banco de México sólo acumularía reservas si los bancos optaban por venderle estos dólares en lugar de hacerlo en el mercado. Adicionalmente, se evitó marcar niveles o mandar *señales* sobre niveles de intervención del tipo de cambio, permitiendo que el precio de ejercicio

de las opciones fuera determinado diariamente por el mercado sin la intervención del Instituto Central.

Resumiendo, el mecanismo de intervención perseguía los siguientes objetivos:

1. Incrementar las reservas internacionales.
2. Acumular reservas minimizando los posibles efectos colaterales indeseables.
3. No alterar la naturaleza del régimen cambiario en vigor, una de cuyas características principales es no predeterminar un nivel o una trayectoria del tipo de cambio.
4. Las intervenciones deben ser transparentes para los participantes en el mercado y completamente esterilizadas.
5. Inducir las compras de divisas por parte del Banco Central cuando el peso se está apreciando y desincentivarlas cuando se está depreciando.

Tomando en consideración los propósitos del Banco de México se diseñó la opción Banxico que describimos a continuación:

1. El último día hábil de cada mes el Banco de México subasta, entre las instituciones de crédito mexicanas, opciones para vender dólares al Banco Central.
2. El contravalor de la operación descrita en el punto (1), se realizará en pesos y se calculará utilizando el tipo de cambio *fix* determinado por el mercado el día hábil anterior.
3. El plazo de vigencia para el ejercicio de la opción corresponderá al mes calendario posterior al día en que se realizó la subasta.
4. Los montos se asignarán ordenando de mayor a menor las primas contenidas en las posturas de los participantes. Los montos demandados, se otorgarán en dicho orden hasta colocar la oferta total. En caso de existir un empate en la última postura, los montos se asignarán a prorrata entre los participantes empataados.
5. Las opciones se podrán ejecutar de forma parcial o total hasta por el monto asignado. El monto mínimo de ejercicio es de un millón de dólares.
6. Las opciones sólo podrán ser ejecutadas, si el precio de ejercicio, es decir, el tipo de cambio *fix* determinado el día hábil

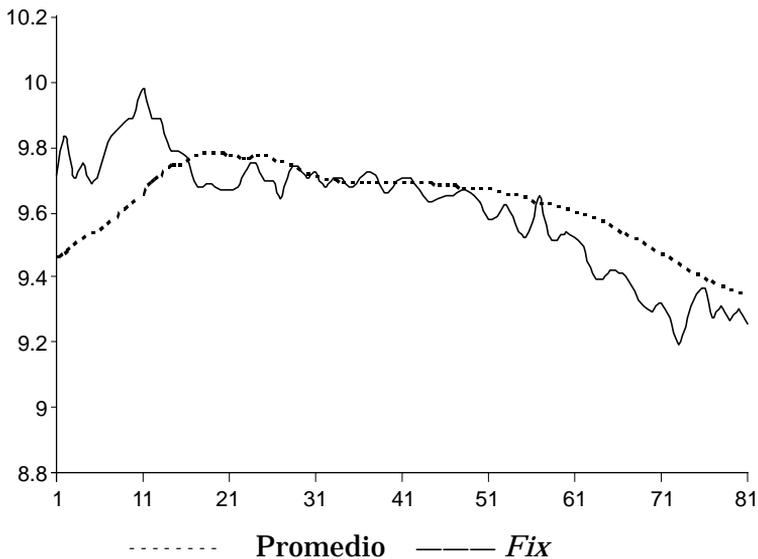
anterior al ejercicio es no mayor al promedio de los veinte tipos de cambio *fix* previamente determinados al día en que se ha decidido ejercer la opción. A este promedio, que cambia día a día, le llamaremos promedio móvil.

7. Se permite la compra-venta de estos derechos en el mercado secundario.
8. Por último, al término de la subasta, el Banco de México aplica un sistema de esterilización con objeto de no afectar el circulante: vende CETES por el monto equivalente a los dólares que adquirió con objeto de retirar del mercado el mismo monto de pesos que se introdujeron en dólares.

En la gráfica 1 se muestra el tipo de cambio *fix* del primero de enero al 31 de marzo de 2000. Los primeros días, la opción no pudo ejercerse debido a que el valor del *fix* (la línea continua) está por encima del valor promedio (la línea punteada); es hasta el día dieciocho que puede ejercerse la opción por primera vez dado que el día anterior el valor del *fix* está por debajo del valor promedio.

Claramente, las características (1) y (2) antes descritas dejan en manos del mercado tanto el precio del instrumento como el precio de

Gráfica 1. Valor del *fix* y del promedio móvil



ejercicio. La característica (6) tiene el propósito de retirar dólares del mercado cuando éste presenta una franca tendencia a la apreciación. Así, el diseño de la opción Banxico plantea los siguientes problemas a las instituciones crediticias:

1. Calcular el valor de la opción al momento de la firma del contrato.
2. Dado que es permitido el mercado secundario, calcular el valor de la opción en cada día durante la vigencia del contrato.
3. Dar un criterio de ejercicio que les permita optimizar sus ganancias.

La respuesta a estos problemas depende del modelo elegido para valuar el instrumento y de un criterio de optimalidad para determinar el tiempo óptimo de ejercicio. Valuar la opción Banxico no es tarea fácil; primero, porque la gran mayoría de las opciones exóticas no pueden valuarse en forma exacta, sobretodo aquellas que dependen de un promedio; segundo, la dificultad se incrementa al ser del tipo americano, las cuales sólo pueden valuarse en forma aproximada a través de esquemas numéricos que resuelven la ecuación asociada en derivadas parciales o por medio de árboles binarios. En este caso, las ecuaciones en derivadas parciales no se pueden utilizar al ser la opción discreta en el tiempo y el método de árboles binarios es ineficiente por el número de trayectorias que se requieren. Cabe mencionar que, para estas opciones, raras veces se obtiene en forma explícita el tiempo de ejercicio óptimo. De hecho, es más fácil estimar el valor de la opción por medio de un algoritmo recursivo, basado en el principio de la programación dinámica, que obtener el tiempo de ejercicio óptimo.

A continuación se presentan resultados del valor exacto y del tiempo de ejercicio óptimo de una opción similar a la Banxico sin la restricción del promedio, lo cual ya es una aportación a la teoría de opciones porque hay pocos ejemplos de opciones exóticas que sean a la vez americanas que puedan valuarse en forma exacta. Gracias a estos resultados, se propone una regla de ejercicio que permite tanto estimar el valor de la opción Banxico, como determinar una aproximación al día óptimo de ejercicio. Esta regla de ejercicio da lugar a un algoritmo dinámico, en el que se actualizan diariamente los parámetros del

modelo, que es mucho más fácil y eficiente que los métodos basados en ecuaciones en derivadas parciales o en árboles binarios.

II. Valuación y tiempo óptimo de ejercicio

En esta sección presentamos dos puntos de vista para el tratamiento de la opción Banxico. El primero se fundamenta en el análisis de riesgo neutro, el principio de la programación dinámica y el teorema de paro óptimo, lo que permite dar cotas inferiores para el valor de la opción en cada tiempo y un criterio de ejercicio dinámico, ver Fernández y Saavedra (2003), mientras que el segundo se basa en un argumento heurístico que da lugar a una regla de ejercicio también dinámica, ver Galán, *et ál.* (1996) y Galán (2000).

En ambos casos, el modelo considerado para el tipo de cambio *fix* es un modelo log-normal, es decir, si S_t denota el tipo de cambio al tiempo t , entonces

$$S_t = S_0 \exp(\gamma t + \sigma B_t),$$

donde γ es la tendencia, σ es la volatilidad y B_t es una variable aleatoria Gaussiana con media cero y varianza t .

II.1. Valuación bajo la probabilidad riesgo neutro y el principio de la programación dinámica

En este caso, el modelo log-normal considerado es el Modelo de Black-Scholes, es decir,

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right\},$$

donde

$$\gamma = \mu - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Siguiendo el enfoque de Garman y Kohlhagen (1983) para divisas, bajo la probabilidad riesgo-neutro P^* , el tipo de cambio *fix* está dado por:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \left(r_1 - r_2 - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\},$$

donde r_1 y r_2 son las tasas libres de riesgo nacional y extranjera, respectivamente, y W_t es una variable aleatoria gaussiana con media cero y varianza t .

Como la opción puede ejercerse en cada día hábil durante la vigencia del contrato, siempre y cuando se cumpla la restricción del promedio móvil, se tiene que la opción es de tipo americana. Denotemos con N a la fecha de expiración del contrato y con Z_n , para $n = 1, \dots, N$, la ganancia en el día n del tenedor del contrato. A Z_n se le llama también la función de pago y está dada por:

$$Z_n = \begin{cases} \max(S_{n-1} - S_n, 0), & \text{si } \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{19} S_{n-i} \geq S_{n-1}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Denotaremos por \hat{Z}_n el valor presente de la función de pago para $n = 1, \dots, N$, es decir,

$$\hat{Z}_n = \frac{Z_n}{e^{r_1 n}}.$$

El principio de la programación dinámica nos da un método recursivo para calcular el valor presente del contrato para cada día, que denotaremos como \hat{U}_n , $n = 1, \dots, N$ y que es el siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{U}_N &= \hat{Z}_N, \\ \hat{U}_n &= \max \left\{ \hat{Z}_n, E^* \left[\hat{U}_{n+1} \mid F_n \right] \right\}, \end{aligned}$$

donde $E^*[\cdot | F_n]$, es la esperanza condicional con respecto a la probabilidad de riesgo neutro P^* y F_n representa la información del tipo de cambio hasta el tiempo n .

Éste es un procedimiento hacia atrás que tiene como fundamento la siguiente idea: el valor presente del contrato al tiempo n es el máximo entre la función de pago en ese tiempo y el valor futuro del contrato, más precisamente, al tiempo de expiración N del contrato

$$\hat{U}_N = \hat{Z}_N,$$

es decir, si la opción no se ha ejercido al tiempo de expiración, su valor es igual al de la función de pago. Si al tiempo $N-1$, el tenedor del contrato no ha ejercido su derecho, puede ocurrir que lo ejerza en ese tiempo o se espere al tiempo N , por lo que el valor de la opción al tiempo $N-1$ será igual al máximo entre la función de pago al tiempo $N-1$ y el valor futuro de la opción, que es interpretado como el valor esperado de \hat{U}_n dada la información del tipo de cambio hasta el día $N-1$, es decir, como $E^*[\hat{U}_N | \hat{F}_{N-1}]$. Siguiendo este mismo razonamiento se obtiene que el valor del contrato en cada tiempo está dado por:

$$\hat{U}_n = \max\left(\hat{Z}_n, E^*\left[\hat{U}_{n+1} | F_n\right]\right).$$

Este procedimiento resuelve al menos teóricamente la valuación de la opción en cada tiempo.

Por otro lado, se sabe por el teorema de paro óptimo que un tiempo óptimo de ejercicio (τ_θ) es la primera vez que la función de pago actualizada es mayor que el valor futuro del contrato, es decir,

$$\tau_\theta = \inf\left\{0 < n \leq N \mid \hat{Z}_n \geq E^*\left[\hat{U}_{n+1} | F_n\right]\right\}$$

y la prima de la opción está dada por

$$U_0 = \sup_{\tau} E^*\left[\hat{Z}_\tau\right] = E^*\left[\hat{Z}_{\tau_\theta}\right],$$

donde el supremo se toma sobre todos los posibles tiempos de ejercicio que no utilizan información privilegiada.

Observemos que el teorema de paro óptimo relaciona el valor del contrato al tiempo inicial con una regla de ejercicio, que es óptima en el sentido que maximiza la ganancia esperada. Así, este teorema nos provee de un método alternativo a la fórmula recursiva para calcular el valor del contrato. En caso de conocer τ_0 el valor U_0 se puede calcular como $E^*[\hat{Z}_{\tau_0}]$. Aún más, dada cualquier regla de ejercicio τ , que no usa información privilegiada, $E^*[\hat{Z}_{\tau}]$ es una cota inferior para el valor del contrato, es decir,

$$E^*[\hat{Z}_{\tau}] \leq E^*[\hat{Z}_{\tau_0}].$$

Desafortunadamente en el caso de la opción Banxico no es posible determinar directamente el tiempo de paro óptimo. El procedimiento recursivo nos obliga a calcular en cada paso la función de pago, la cual depende del promedio móvil de los 20 días anteriores a la fecha de ejercicio, dificultando considerablemente su estudio y manejo computacional. En Fernández y Saavedra (2003), se presenta el estudio de la opción Banxico por medio del modelo binomial que permite aproximar la solución por medio de árboles binarios y el método recursivo antes expuesto. Generar árboles con 2^N nodos y calcular para cada uno de los nodos el promedio móvil, es un procedimiento que sólo funciona para valores no muy grandes de N , por lo que no hay posibilidad de refinar el árbol y obtener una mejor aproximación a la solución. Las conclusiones de Fernández y Saavedra (2003) muestran que para la opción Banxico el modelo discreto puede estimar aceptablemente el valor de la opción, pero no es el mejor procedimiento para estimar el tiempo de paro óptimo. Por estas razones, se evitó usar el método recursivo en el caso continuo.

Sin embargo, del análisis del modelo continuo de la opción Banxico sin la restricción del promedio móvil, ver Fernández y Saavedra (2003), se obtienen cotas inferiores para la opción y tiempos de ejercicio óptimos que si bien no se puede garantizar que sean óptimos al tomar en consideración la restricción del promedio móvil, son muy eficientes conforme a los resultados obtenidos.

Antes de presentar los resultados para la opción sin la restricción del promedio móvil, se definirán a continuación algunas variables.

Para cada $n \in \{1, \dots, N\}$ definamos a T_n como los rendimientos en el n -ésimo día, es decir,

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}}.$$

Bajo el modelo de Garman-Kohlhagen (1983) y la probabilidad riesgo neutro P^* , T_n es una variable aleatoria log-normal de la forma

$$T_n = e^{r_1 - r_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma X_n}$$

con X_n como una variable aleatoria Gaussiana estándar independiente de F_r .

En otras palabras, X_n es una variable aleatoria que satisface

$$X_n = \frac{\log T_n}{\sigma} + K_1, \quad K_1 = \frac{1}{2}(\sigma - k), \quad k = \frac{2(r_1 - r_2)}{\sigma}.$$

En lo que sigue vamos a usar la siguiente notación

$$Y_N = K_1, \\ A_N = \Phi(K_1) - e^{r_1 - r_2} \Phi\left[-\frac{(k + \sigma)}{2}\right]$$

y para toda $n \in \{0, \dots, N\}$

$$Y_{N-n} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{\sigma} \log(e^{-r_2} A_{N-n+1} + e^{r_1 - r_2}), \\ A_{N-n} = \Phi(Y_{N-n}) - \Phi(Y_{N-n} - \sigma)(e^{r_1 - r_2} + e^{-r_2} A_{N-n+1}) + e^{-r_2} A_{N-n+1},$$

donde Φ denota la distribución Gaussiana acumulada.

Sea Z_n^s la función de pago de la opción sin la restricción, es decir,

$$Z_n^s = \max(S_{n-1} - S_n, 0),$$

\hat{Z}_n^s el valor actualizado y \hat{U}_n^s el valor presente de la opción Banxico sin la restricción de ejercicio del promedio móvil, obtenida por el mismo procedimiento hacia atrás antes descrito. El siguiente teorema puede consultarse en Fernández y Saavedra (2003).

Teorema. El valor de la opción Banxico sin la restricción de ejercicio del promedio móvil \hat{U}_n^s , satisface para toda $n \in \{0, \dots, N\}$, ($\hat{U}_0^s = U_0^s$)

$$\begin{aligned} \hat{U}_N^s &= \hat{S}_{N-1} \max\{1 - T_N, 0\}, \\ \hat{U}_{N-n}^s &= \frac{\hat{S}_{N-n-1}}{e^{r_i}} \begin{cases} (1 - T_{N-n}) & \text{si } X_{N-n} < Y_{N-n}, \\ \frac{T_{N-n}}{e^{r_i}} A_{N-n+1} & \text{si } X_{N-n} \geq Y_{N-n}, \end{cases} \\ \hat{U}_0^s &= \frac{S_0}{e^{r_i}} A_1, \end{aligned}$$

donde T_n , X_n y Y_n están dadas anteriormente.

Corolario. El tiempo óptimo de ejercicio τ_0^s de la opción Banxico sin restricción está dado por

$$\tau_0^s = \begin{cases} \inf \{0 < n \leq N \mid X_n < Y_n\} & \text{si } X_n < Y_n \text{ para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En este caso, se tiene que el valor esperado de la opción Banxico sin la restricción del promedio móvil, dado que se cuenta con la información del tipo de cambio hasta el día n , es mayor o igual que el valor esperado de la opción Banxico; es decir, para cada $n = 1, \dots, N$ se tiene

$$E^* \left[\hat{U}_{n+1}^s \mid F_n \right] \geq E^* \left[\hat{U}_{n+1}^s \mid F_n \right]$$

pero esta relación no es suficiente para obtener un tiempo óptimo de ejercicio para la opción Banxico. Sin embargo, a partir del corolario se puede definir como regla de ejercicio para la opción la siguiente:

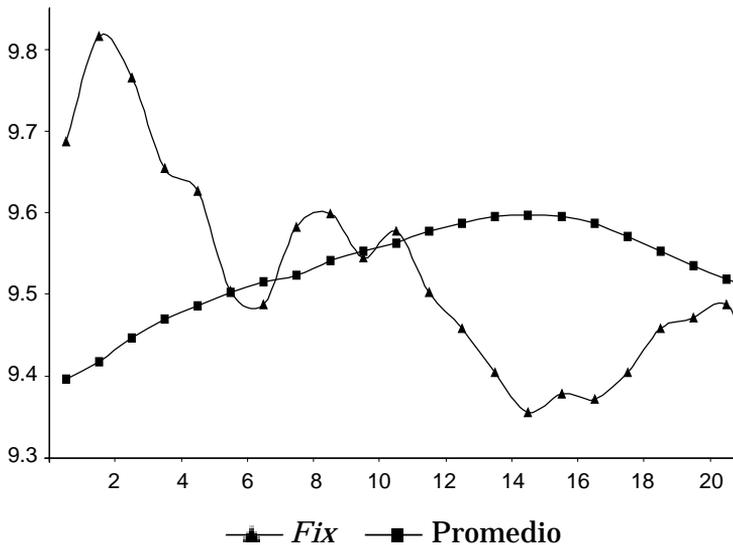
$$\tau_0 = \begin{cases} \inf \left\{ 0 < n \leq N \mid \text{si } X_n < Y_n, \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{19} S_{n-i-1} \geq S_{n-1} \text{ para alguna } n \right\} \\ N, \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Por el teorema de paro óptimo $E^*[\hat{Z}_\tau]$ es una cota inferior para el valor de la opción y esta cota inferior es posible estimarla por el método de Monte-Carlo. Es decir, dados r_1 , r_2 y σ , se calculan las constantes A_n y Y_n respectivas y se generan M trayectorias del tipo de cambio *fix* por medio de

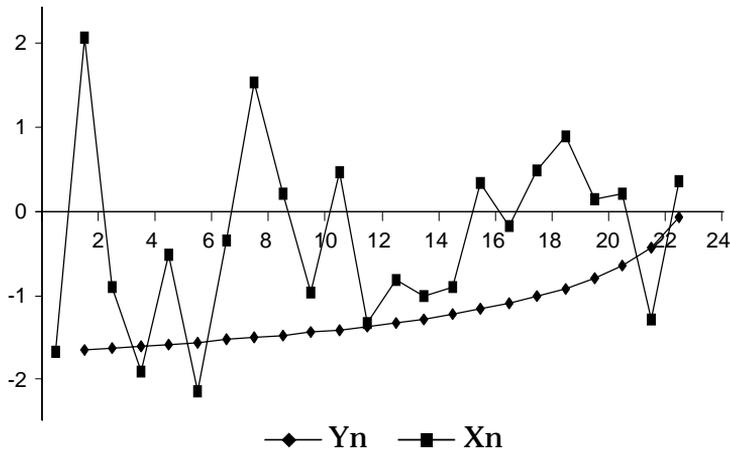
$$S_n^j = S_{n-1}^j e^{r_1 - r_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \varepsilon_n^j \sigma}, \quad j=1, \dots, M, \quad n=1, \dots, N,$$

con ε_n^j números aleatorios independientes normales con media cero y varianza uno. A cada trayectoria se le aplica el criterio de ejercicio τ y se calcula la función de pago en el tiempo que se satisface. El prome-

Gráfica 2. Junio 1999



Gráfica 3. Junio 1999



dio de estos valores estima inferiormente el valor de la opción Banxico. Cabe señalar, que aún cuando el método Monte-Carlo no se usa para estimar el valor de las opciones tipo americana, gracias a que tenemos un criterio de ejercicio podemos aplicarlo en este caso.

A continuación presentamos algunas gráficas para ilustrar el comportamiento de esta regla de ejercicio. La gráfica 2 muestra el comportamiento del tipo de cambio *fix* durante el mes de junio de 1999 a partir del último día del mes anterior, o sea, es la gráfica de S_n para $n = 0, \dots, N$. Como podemos observar, los primeros cinco días del mes no se cumple la restricción del promedio móvil. A pesar de que el sexto día se satisface, como el valor de S_7 se incrementa con respecto a S_6 , no conviene ejercer ese día, por lo que hay que esperar hasta el doceavo día para hacerlo. En consecuencia, el día doce es el primer día en que es posible ejercer la opción; de hacerlo así, se obtendría una ganancia de $S_{11} - S_{12} = 43.30$ pesos por mil dólares. Por otro lado, si se ejerciera con la regla de ejercicio τ , habría que hacerlo el primer día que se satisface la restricción del promedio y que $X_n < Y_n$.

La gráfica 3 muestra los valores que toman estas dos variables durante el mes de junio. Como podemos observar, se da $X_n < Y_n$ en el tercero, quinto y vigésimo primer día del mes; dado que la restricción del promedio móvil sólo se satisface el vigésimo primer día del mes, es éste el primer día en el que se cumplen ambas condiciones. De ejercer el derecho ese día se obtendría una ganancia de 71.00 pesos por mil dólares, la mayor posible durante el mes.

Cabe señalar que, de utilizar el tiempo τ como una regla de ejercicio, garantizamos que el valor de la función de pago en ese tiempo es mayor que el valor futuro de la opción, pero podría ocurrir que nunca se pudiera ejercer, por lo que puede ser un criterio muy restrictivo. Sin embargo, dado que los resultados obtenidos son válidos para cualquier valor de N (es decir, del tiempo de expiración), proponemos un algoritmo dinámico para estimar inferiormente el valor de la opción diariamente. Más precisamente, proponemos el siguiente algoritmo para calcular, tanto el valor de la opción en cada día, como para decidir si se ejerce o no ese día:

- (1) Se toman r_1, r_2 como la tasa de CETES y la tasa de los American Treasury Bills, respectivamente.
- (2) Se estima la volatilidad σ^n , con la información del tipo de cambio hasta el tiempo $n-1$.
- (3) Con estas cantidades se calculan las constantes $Y_k^n, A_k^n, n < k \leq N$, de las ecuaciones (1) y (2).
- (4) Por el método Monte-Carlo y usando la regla de ejercicio τ se estima $E[\hat{Z}_\tau^n]$.
- (5) Si la función de pago al tiempo n es mayor que la esperanza estimada, se ejerce la opción; si no, se espera y el día $n+1$ se repite el procedimiento anterior con la información actualizada.

II.2. Método heurístico de tiempo de ejercicio

En este punto de vista, supondremos que el tenedor del contrato busca obtener una regla de ejercicio relacionada directamente con la volatilidad y que maximice el beneficio esperado. Más precisamente, podemos observar que la distribución de los rendimientos T_n es independiente de n , ya que

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} = e^{\gamma + \sigma X_n},$$

donde X_n es una variable aleatoria Gaussiana estándar. Así, denotaremos genéricamente a los rendimientos por T . Para cada $\alpha < 0$, el

beneficio económico esperado —denotado por $G(\alpha)$ — que resultaría de ejercer la opción en función directa de la volatilidad estaría dado por:

$$G(\alpha) = -E[\log T | \log T < \alpha\sigma].$$

Obsérvese que $\alpha < 0$, pues de ejercer la opción, el logaritmo de los rendimientos es negativo. Puesto que lo que se busca es maximizar el beneficio esperado se requiere encontrar α^* tal que

$$G(\alpha^*) = \max_{\alpha} G(\alpha).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} G(\alpha) &= -\frac{E[\log T I_{[\log T \leq \alpha\sigma]}]}{P[\log T \leq \alpha\sigma]} \\ &= -\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\alpha\sigma} x e^{-(x-\gamma)^2 / 2\sigma^2} dx}{\Phi(\alpha - \gamma/\sigma)} \\ &= -\gamma + \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\alpha-\gamma/\sigma)^2 / 2}}{\Phi(\alpha - \gamma/\sigma)}. \end{aligned}$$

Derivando $G(\sigma)$ con respecto a α obtenemos

$$\frac{d}{d\alpha} (G(\alpha)) \approx \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\alpha-\gamma/\sigma)^2 / 2} \left[1 + \alpha - \frac{\gamma}{\sigma} \right],$$

de donde

$$\alpha^* \approx -1 + \frac{\gamma}{\sigma}.$$

Por lo tanto, es óptimo ejercer cuando $\text{Log } T < [-1 + (\gamma/\sigma)]^\sigma$. El cociente γ/σ depende de la relación entre la diferencia de la tasa doméstica y foránea y de la volatilidad. Esta relación está lejos de ser una constante. En Galán (2000), a partir de los valores observados durante los primeros meses de vigencia de la opción, se sugiere que este cociente sea igual a 0.2. Por lo tanto, se propone seguir el siguiente algoritmo heurístico para ejercer la opción:

- (1) La volatilidad σ^n del día n se estima con la información del tipo de cambio hasta ese día.
- (2) Si el día n se cumple la restricción del promedio y $\text{Ln}(S_n/S_{n-1}) \leq -0.8 \sigma^n$ se ejerce la opción. Si no, se espera y se repite el procedimiento para el día $n+1$.

III. Desempeño de la Opción Banxico

A continuación se presenta el resumen del comportamiento de la opción Banxico de agosto de 1996 a junio de 2001, período en que estuvo en operación la opción. Hay que mencionar que durante 1997 y 1998 se decidió llevar a cabo dos subastas por mes, siempre y cuando antes del quinceavo día del mes respectivo se hubiera ejercido más del 80 por ciento del monto adjudicado a principios del mes.

Cuadro 1

No. de subastas realizadas	62
No. de subastas en las que se pudo ejercer al menos en un día	51
Monto total ofrecido en las subastas	16,330 mdd
Monto total colocado	16,330 mdd
Monto total ejercido.	12,245 mdd
Monto total de primas recibidas	430 mdp
Beneficio económico obtenido al ejercer la opción	422 mdp

En el cuadro 2 se muestra el comportamiento mensual de la opción Banxico. En la primera columna se indica el mes; cuando hay dos subastas en un mes, se identifica la primera con un 1 y la segunda con un dos. La tercera columna presenta el valor estimado de la prima de la opción cuando se aplica el modelo log-normal con la volatilidad histórica y la regla de ejercicio τ . El precio de la subasta y el valor estimado es por mil dólares. En la cuarta columna se indican los millones de

Cuadro 2

<i>Mes</i>	<i>Subasta</i>	<i>U₀</i>	<i>Monto</i>	<i>C</i>	<i>G1</i>	<i>G2</i>	<i>G3</i>	<i>G1-C</i>	<i>G2-C</i>	<i>G3-C</i>
1996										
Agosto	11.68	14.88	130	6.0600	2.238	3.704	2.301	-3.8220	-2.356	-3.750
Sep.	4.65	6.06	200	0.9300	1.497	0.000	0.000	0.5670	-0.930	-0.930
Oct.	10.18	22.92	200	2.0360	2.680	0.000	0.000	0.6440	-2.030	-2.030
Nov.	10.32	19.20	200	2.0640	3.640	6.900	0.000	1.5760	4.836	-2.060
Dic.	14.43	17.73	200	2.8860	4.275	2.820	7.420	1.3890	-0.066	4.530
Total			930	13.9800	14.330	13.420	9.721	0.3540	-0.552	-4.250
1997										
Enero	13.75	16.33	300	4.1250	5.403	4.680	6.030	1.2780	0.555	1.900
Feb-1	16.14	9.90	300	4.8420	2.510	3.540	3.540	-2.3320	-1.300	-1.300
Feb-2	15.08	0.00	300	4.5240	1.702	3.690	3.690	-2.8220	-0.830	-0.830
Marzo	10.40	11.16	300	3.1200	-2.240	0.000	0.000	-5.3600	-3.120	-3.120
Abril-1	21.86	46.11	300	6.5580	5.820	14.280	14.280	-0.7380	7.720	7.720
Abril-2	13.86	0.00	300	4.1580	3.005	0.000	0.000	-1.1530	-4.150	-4.150
Mayo	14.38	10.16	300	4.3140	2.300	6.690	6.690	-2.0140	2.370	2.370
Junio	11.74	16.64	300	3.5220	-0.140	0.000	0.000	-3.6620	-3.520	-3.520
Julio-1	20.61	20.61	300	6.1830	5.690	11.610	6.180	-0.4930	5.427	-0.003
Julio-2	19.57	0.00	300	5.8710	2.700	11.610	11.610	-3.1710	5.730	5.730
Agosto	23.26	29.89	500	11.6300	11.300	0.000	0.000	-0.3300	-11.630	-11.630
Sep.	12.27	9.53	500	6.1350	7.940	6.550	6.550	1.8050	0.410	0.410
Oct.	16.10	20.99	400	6.4400	7.090	8.560	8.560	0.6500	2.120	2.120
Nov.	13.05	60.62	250	3.2620	3.680	0.750	0.000	0.4170	-2.515	-3.260
Dic.-1	30.50	88.38	250	7.6250	9.470	15.550	15.550	1.8450	7.920	7.920
Dic.-2	33.81	0.00	250	8.4520	10.030	11.500	11.500	1.5770	3.040	3.040
Total			5150	90.7600	76.260	99.010	94.180	-14.5000	8.248	3.410
1998										
Enero	33.54	33.55	250	8.3850	0.793	0.000	0.000	-7.5910	-8.380	-8.380
Febrero	15.85	41.92	250	3.9620	0.000	0.000	0.000	-3.9620	-3.960	-3.960
Marzo	30.25	28.54	250	7.5620	10.400	10.400	10.400	2.8370	2.830	2.830
Abril-1	33.60	0.00	250	8.4000	9.050	10.100	10.100	0.6500	1.700	1.700
Abril-2	24.09	29.86	250	6.0220	0.000	0.000	0.000	-6.0220	-6.020	-6.020
Mayo	24.51	12.97	250	6.1275	2.154	4.025	4.025	-3.9730	-2.100	-2.100
Junio	10.24	40.52	250	2.5600	0.000	0.000	0.000	-2.5600	-2.560	-2.560
Julio-1	24.85	0.00	250	6.2125	9.025	11.920	11.920	2.8120	5.710	5.710
Julio-2	23.76	51.91	250	5.9400	6.820	0.000	8.050	0.8800	-5.940	2.110
Agosto	19.67	13.50	250	4.9175	0.000	0.000	0.000	-4.9170	-4.910	-4.910
Sep.	12.43	64.00	250	3.1075	-0.394	0.000	0.000	-3.5010	-3.100	-3.100
Oct.	0.00	0.00	000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.000
Nov.	0.00	0.00	000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.000
Dic.	0.00	0.00	000	0.0000	0.000	0.000	0.000	0.0000	0.000	0.000
Total			2750	63.1950	37.840	36.450	44.500	-25.3500	-26.750	-18.690
1999										
Enero	24.38	19.76	250	6.0950	11.990	11.380	11.380	5.8950	5.280	5.280
Febrero	36.63	116.30	250	9.1575	9.900	5.200	9.880	0.7420	-3.950	0.720
Marzo	46.62	30.36	250	11.6550	8.510	9.230	7.680	-3.1450	-2.420	-3.970
Abril	33.84	33.81	250	8.4600	13.020	10.000	12.780	4.5600	1.540	4.320
Mayo	35.34	44.10	250	8.8350	10.000	12.200	12.200	1.1650	3.360	3.360
Junio	20.01	46.14	250	5.0025	11.540	17.750	17.750	6.5375	12.740	12.740
Julio	50.89	53.25	250	12.7220	11.120	15.900	8.350	-1.6020	3.177	-4.370
Agosto	31.25	38.24	250	7.8125	6.300	10.830	10.83	-1.512	3.010	3.01
Sept.	36.93	28.32	250	9.2325	4.160	8.925	7.43	-5.072	-0.307	-1.80

Oct.	26.36	16.80	250	6.5900	0.000	0.000	0.00	-6.590	-6.590	-6.59
Nov.	29.59	32.15	250	7.3975	21.000	21.000	21.00	13.600	13.600	13.60
Dic.	23.44	22.60	250	5.8600	0.688	5.300	7.00	-5.172	-0.560	1.14
Total			3000	98.8200	108.200	127.710	126.20	9.408	28.890	27.46
2000										
Enero	36.56	18.33	250	9.1400	7.519	0.000	0.00	-1.621	-9.140	-9.14
Febrero	30.22	29.72	250	7.5550	11.900	11.900	11.90	4.345	4.340	4.34
Marzo	33.37	31.73	250	8.3425	7.180	6.680	6.28	-1.162	-1.662	-2.06
Abril	35.32	21.29	250	8.8300	0.000	0.000	0.00	-8.830	-8.830	-8.83
Mayo	34.34	40.03	250	8.5850	0.900	0.000	0.00	-7.685	-8.580	-8.58
Junio	35.70	47.30	250	8.9250	0.000	0.000	0.00	-8.925	-8.920	-8.92
Julio	59.90	70.92	250	14.9750	69.550	69.550	69.55	54.570	54.570	54.57
Agosto	35.78	41.76	250	8.9450	9.011	7.680	7.68	0.066	-1.260	-1.26
Sept.	31.60	27.83	250	7.9000	0.000	0.000	0.00	-7.900	-7.900	-7.90
Oct.	25.68	24.95	250	6.4200	0.000	0.000	0.00	-6.420	-6.420	-6.42
Nov.	32.40	25.23	250	8.1000	15.430	15.430	15.43	7.330	7.330	7.33
Dic.	34.70	30.34	250	8.6750	6.080	9.880	9.88	-2.595	1.200	1.20
Total			3000	106.3900	127.500	121.120	120.72	21.170	14.720	14.32
2001										
Enero	21.56	35.66	250	5.3900	3.590	0.000	0.00	-1.800	-5.390	-5.39
Febrero	43.82	60.54	250	10.9550	13.680	14.050	14.05	2.725	3.090	3.09
Marzo	39.02	27.15	250	9.7550	7.870	7.630	7.95	-1.885	-2.125	-1.80
Abril	48.14	44.08	250	12.0350	19.530	19.530	11.80	7.495	7.495	-0.23
Mayo	47.80	54.17	250	11.9500	8.920	42.330	42.33	-3.030	30.380	30.38
Junio	27.36	34.45	250	6.8400	4.400	0.000	0.00	-2.440	-6.840	-6.84
Total			1500	56.9250	57.990	83.540	76.13	1.065	26.610	19.20
Total general			16330	430.0700	422.200	481.200	471.53	-7.846	51.180	41.45

pesos subastados ese mes. En la quinta columna, C, se muestra el monto mensual o prima, en millones de pesos, que recibió Banxico como producto de la subasta. En la sexta columna se presentan las ganancias obtenidas por las instituciones financieras, G1, y en la séptima y octava columna se muestran las ganancias que se hubieran obtenido si se hubiera ejercido con el algoritmo dinámico, G2, o con la regla heurística, G3, respectivamente. Estas dos cantidades se calculan mensualmente de la siguiente forma: se determina el día óptimo del mes según la regla que corresponda; se calcula la ganancia total multiplicando la ganancia obtenida por dólar ese día por el monto total de dólares que se asignaron en la subasta mensual. Por último, en la novena, décima y onceava columna se presentan las ganancias netas, es decir, las ganancias totales menos el pago de la prima que obtuvieron las instituciones financieras, G1-C, y las que hubieran obtenido con el algoritmo dinámico, G2-C y con el algoritmo heurístico, G3-C.

Cuando aparece un 0 en la columna G1 indica que durante ese mes no se pudo ejercer la opción; si aparece 0 en la columna de G2 o

G3 implica que el criterio para ejercer la opción del algoritmo dinámico o heurístico no se cumplió a lo largo del mes, respectivamente.

Este cuadro muestra que el valor observado de la opción, producto de la subasta, está en promedio por debajo del valor estimado. Cabe señalar que es difícil comparar estas cifras porque el precio real que pagaron las instituciones financieras se fijó a través de una subasta y dependió de muchos factores, entre los que destacan la volatilidad del mercado y el comportamiento de la opción en el mes anterior. Por ejemplo, durante el mes de agosto de 1998 no se cumplió la restricción del promedio en todo el mes por lo que los compradores de la opción no estuvieron dispuestos a pagar mucho por la opción de septiembre, a pesar de que la volatilidad histórica el día de la subasta era superior al 20 por ciento anual. Por otro lado, el valor estimado siempre se calculó con la volatilidad histórica y su valor se incrementa a medida que crece ésta. Por ello, en algunos meses en los que la volatilidad es superior al 20 por ciento anual, la diferencia entre el valor real de la subasta y el estimado es considerable, como por ejemplo, en la primera quincena del mes de diciembre de 1997, en septiembre de 1998, en febrero de 1999 o en agosto de 2000. Sin embargo, a pesar de estas consideraciones, se puede concluir que las instituciones financieras pagaron en promedio un valor menor que el obtenido teóricamente.

El análisis anterior determina que la ganancia neta de las instituciones financieras fue de -7.85 millones de pesos. Esto quiere decir que en promedio las instituciones financieras no ejercieron la opción cuando más les convenía. De hecho, cerca del 30 por ciento del monto total ejercido, se ejerció el primer día que se cumplió la restricción del promedio y que la ganancia era positiva. Incluso, algunas instituciones lo hicieron el primer día en que se pudo ejercer la opción aunque la ganancia fuera negativa. Lo anterior puede ser resultado de suponer en este trabajo que el tipo de cambio, al cual las instituciones adquirieron los dólares del mercado, es el tipo de cambio *fix*. Este supuesto ciertamente no es válido, dado que cada una de las instituciones de crédito compra y vende dólares a distintos tipos de cambio durante el día y con distintos diferenciales entre compra y venta. Sin embargo, por carecer de esta información, sólo consideramos un mercado al *fix*.

Por otro lado, la efectividad de los algoritmos dinámico y heurístico se muestra al observar en el último renglón que si las instituciones financieras hubieran ejercido con estos algoritmos habrían obtenido

casi 51 millones de pesos o cerca de 41 millones de ganancia neta, respectivamente.

A continuación se muestra un resumen del comportamiento de los algoritmos dinámico y heurístico al ser aplicados a la opción Banxico durante su período de operación.

Cuadro 3

No. de subastas realizadas	62
No. de subastas con ejercicio	51
No. de subastas con ejercicio con el algoritmo dinámico	38
No. de subastas con ejercicio con el algoritmo heurístico	40
Monto total ofrecido	16,630 mdd
Monto ejercido la primera vez	31 %
Monto ejercido en el óptimo del algoritmo dinámico	23.8 %
Monto ejercido en el óptimo con algoritmo heurístico	23.4 %
Monto total de primas recibidas	430 mdp
Beneficio observado	422.22 mdp
Beneficio potencial en el óptimo algoritmo dinámico	481.25 mdp
Beneficio potencial en el óptimo algoritmo heurístico	471.53 mdp
Beneficio neto observado	-7.84 mdp
Beneficio neto en el óptimo algoritmo dinámico	51.18 mdp
Beneficio neto en el óptimo algoritmo heurístico	41.45 mdp

IV. Conclusiones

Este trabajo tiene como objetivo principal presentar una regla de ejercicio para estimar el valor y la fecha de ejercicio óptima de la opción Banxico. Cabe recordar que este instrumento financiero es una opción exótica, depende de la trayectoria que sigue el subyacente, que tiene una vigencia de 18 a 23 días hábiles y que puede ejercerse en cualquiera de estos días, siempre y cuando se cumpla una restricción que depende de un promedio móvil. Además, su precio de ejercicio no es fijo sino estocástico; esta diferencia introduce una dinámica muy particular a la opción que complica su valuación. La opción, que fue diseñada en México, se utilizó de agosto de 1996 a junio de 2001 e incidió de manera importante en el incremento de las reservas internacionales del Banco de México, representando en su momento un instrumento de política cambiaria del Gobierno Federal.

La regla de ejercicio y el algoritmo dinámico que se proponen en este artículo nos permiten estimar el valor y el día óptimo de ejercicio

de la opción Banxico. Los resultados numéricos presentados validan el algoritmo dinámico y muestran su desempeño al compararlos con otras reglas de ejercicio. Los resultados nos permiten afirmar que el algoritmo dinámico es un buen algoritmo para determinar el tiempo de ejercicio de la opción Banxico.

A manera de resumen podemos decir que el cálculo y la simulación propuesta en este artículo nos llevan a las siguientes conclusiones:

1. Bajo la hipótesis que el tipo de cambio *fix* tiene una distribución log-normal los resultados sugieren que la opción Banxico fue comprada, en promedio, por debajo de su valor.
2. Bajo la hipótesis de existir un único mercado al tipo de cambio *fix*, las instituciones financieras no ejercieron, en promedio, el día que mejor les convenía, pudiendo con ello generar mayores utilidades.
3. La opción Banxico cumplió perfectamente con su cometido de auxiliar al Banco de México a incrementar sus reservas internacionales.
4. La regla de ejercicio heurística es muy sencilla de aplicar y tiene un excelente comportamiento.
5. El tiempo de ejercicio τ propuesto permite estimar inferiormente el valor de la opción en cada tiempo por medio del Monte-Carlo que es un procedimiento flexible y sencillo de aplicar.
6. El algoritmo dinámico que proponemos no sólo nos permite estimar inferiormente el valor de la opción, sino que nos da un criterio de ejercicio que, según sugiere el análisis del comportamiento de la opción, es mejor que el criterio heurístico y las reglas que siguieron las instituciones financieras.

Referencias bibliográficas

- Fernández, B. and P. Saavedra (2003), "Valuation and Optimal Exercise Time for the Banxico Put Option", aceptado para su publicación en el *International Journal of Theoretical and Applied Finance*.
- Galán, M., J. Duclaud González y Castilla, A. García Tamés (1996), *Una estrategia de reservas mediante opciones de venta de dólares. Derivados Financieros. Teoría y Práctica*, Operadora de Bolsa Serfin, pp. 234-250.

- Galán, M. (2000), "La experiencia del Banco de México", conferencia impartida en el III Taller sobre Matemáticas y Finanzas, organizado por la Sociedad Matemática Mexicana, 6 de septiembre de 2000.
- Garman, M. and S. Kohlhagen (1983), "Foreign Currency Option Values", *Journal of International Monetary and Finance*, num. 2, pp. 31-237.
- Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz (2001), "Valuing American options by simulation: a simple least-square approach", *The Review of Financial Studies*, num. 14, pp. 113-147.
- Werner, A. y A. Milo (1997), *Acumulación de reservas internacionales a través de la venta de opciones*, reporte interno del Banco de México.
- Zhang, P. (1998), *Exotic Options: A guide to second generation options*, World Scientific Publishing Co., 2nd edition.