Aprendizaje con información incompleta en modelos de consumo con múltiples atributos

José Carlos Ramírez y John Goddard*

Resumen: El documento plantea un modelo de optimización intertemporal con funciones de utilidad de múltiples atributos, cuando el consumidor desconoce inicialmente la mezcla óptima de atributos que maximiza la utilidad de su consumo. Las trayectorias de consumo, obtenidas con base en un modelo lineal en el que se analizan cuatro "casos límites", muestran que los resultados de aprendizaje pueden ser diversos. En particular, se prueba que el individuo puede alcanzar una situación de equilibrio (o, mas técnicamente, que su trayectoria de consumo describe una martingala) en la elección de su mezcla de productos antes de agotar su presupuesto, lo cual lleva a situaciones de equilibrio no consideradas en el análisis tradicional de las funciones de utilidad.

Abstract: This paper deals with an intertemporal model of optimization, which is based on multiple attribute utility functions (MUAT). The model assumes that consumers do not know *a priori* the optimal mixture of attributes which would maximize their utility from consumption. By using a MUAT lineal model, we state that the resulting consumption paths for four "extreme cases" are associated with several learning processes. In particular, we show that optimal equilibria in consumption of goods can be reached before the consumer exhausts her/his budget, a kind of equilibrium situation not analyzed in traditional utility functions.

* Miembros del departamento de Ecomomía del CIDE y de la Universidad de Oxford. Los autores agradecen los comentarios de Ian Savage de la Universidad de Northwestern y de dos dictaminadores anónimos.

Desde la aparición del artículo seminal de Kelvin Lancaster (1966) sobre las *funciones de utilidad con múltiples atributos* (FUMAT), no es raro sostener que los consumidores derivan su utilidad de las características o atributos de los bienes y no de los bienes en sí. Los defensores de esta posición señalan que las funciones de utilidad no son relaciones de correspondencia entre los niveles de utilidad y las cantidades de bienes, sino, más bien, relaciones entre esos niveles y el conjunto ordenado de atributos de uno o varios bienes (véase, por ejemplo, Keeney y Raiffa, 1976). Y es que, de acuerdo con ellos, los consumidores piensan en los bienes más como objetos formados por un vector de atributos, que como entes indivisibles, al momento de ordenar sus preferencias. Un comprador de autos, por ejemplo, no observa objetos iguales al momento de seleccionar un modelo, sino que compara la línea, potencia, comodidad o precio de cada auto antes de decidirse por uno. La elección del consumidor es determinada, entonces, por la naturaleza de los atributos del auto (de entre los cuales destaca el precio), no por la utilidad abstracta que le proporciona el bien.

El planteamiento de este "nuevo enfoque" fue generalizado por el mismo Lancaster al estudio de la conducta del consumidor, del mercado laboral y monetario, de los bienes públicos y, sobre todo, de las estrategias óptimas de diferenciación de productos de las empresas (Lancaster, 1975, 1991).[1] Sin embargo, el camino seguido por el nuevo enfoque se alejó muy pronto del *mainstream* de la teoría económica. Con excepción del modelo de "productos abstractos" de Baumol (1967), en el que los consumidores maximizan una función de utilidad lineal con varios atributos, las referencias de Hay y Morris (1991) al vínculo de las FUMAT con los modelos espaciales y, más recientemente, los trabajos de índices de precios ajustados por Nordhaus (1997), no se registran desarrollos importantes en la literatura especializada después de los escritos de Lancaster. Es más bien en el campo de la teoría de la decisión y en los estudios de casos aplicados que las FUMAT empiezan a cobrar relevancia a partir de los años setenta (véase Bell *et al.*, 1988).[2]

[1] Sobre este último punto, el nuevo enfoque considera que, debido a que la diferenciación de los productos reside en las disparidades reales de sus atributos, las variedades con diferentes proporciones de atributos tendrán, bajo ciertos supuestos (en particular, cuando el número de variedades es mayor que el de atributos), precios diferentes (Jacquemin, 1982).

[2] Keeney y Raiffa (1976) utilizan las FUMAT, por ejemplo, para resolver algunos problemas relacionados con la teoría de la decisión, medio ambiente, localización, diagnóstico de enfermedades y negocios. Otro tanto hacen Gregory Fischer (1975), Von Winterfeldt y Fischer (1975) y Humphreys y Humphreys (1975), quienes estudian diversos problemas de elección. Asimismo, estas funciones han sido aplicadas al llamado análisis conjunto (*conjoint analysis*), un área muy

La explicación a la pérdida de interés de los economistas por las FUMAT obedece, en buena medida, a su complicado tratamiento matemático. Y es que la optimización de funcionales con múltiples atributos supone problemas de *dimensionalidad* que, aun ahora, son técnicamente difíciles de resolver.[3] La historia por simplificar su utilización, que arranca con los trabajos iniciales de Lancaster, revela que aun cuando las FUMAT han mostrado ser muy útiles para explicar el comportamiento del consumidor, las complicaciones surgidas en la estimación de los controles óptimos han desalentado su aplicación en el estudio del aprendizaje que, a decir de Keeney y Raiffa (1976), es la base del nuevo enfoque.

La motivación de este trabajo parte, precisamente, de reconocer que, a pesar de sus complicaciones, las FUMAT son ideales para modelar procesos de aprendizaje en los que los consumidores descubren sus preferencias al momento de consumir los bienes.[4] En concreto, el trabajo tiene como objetivo extender el modelo de Lancaster a situaciones en las que el individuo desconoce *ex ante* la mezcla óptima de atributos que maximiza la utilidad de su consumo. Para tal efecto, se propone un modelo intertemporal lineal en el que se consideran diferentes periodos de consumo, $T(D)$, número de atributos, r, y de productos, m, cuyas combinaciones dan como resultado cuatro escenarios que nosotros llamamos "casos límite".

Las trayectorias de consumo obtenidas con base en dicho modelo muestran que los resultados de aprendizaje pueden variar según el número de atributos y periodos que un consumidor considere en condiciones de información incompleta. La principal conclusión es que el individuo puede alcanzar una situación de aprendizaje completo en la elección de su mezcla de atributos (o, más técnicamente, que su trayectoria de consumo se comporta como una martingala) sólo en el caso límite de *holgura de mercado y temporal* (esto es, cuando $T(D) \$ r$ y $m \$ r$).

---

fértil en la que el nuevo enfoque ha sido empleado para realizar estudios de mercado y de evaluación de proyectos de inversión, y en donde es imposible ignorar los atributos que poseen los bienes. Fischer (1975) aplica las FUMAT a decisiones de inversión y gasto público.

[3] Los problemas de *dimensionalidad* en la optimización de las FUMAT surgen a causa de las diferentes dimensiones en las que se miden las variables de control y de estado; esto es, se tiene que calcular una familia de controles, expresada en bienes (y, por tanto, en escalares), a partir de un conjunto de estados expresados en vectores de atributos.

[4] Este tipo de trabajos, llamados de "utilidad adaptativa", ya han sido planteados en el marco de las funciones sobre bienes por Cyert y De Groot (1975) y Louis Wilde (1981), entre otros tantos.

Este resultado lleva a situaciones de equilibrio no consideradas en el análisis original de Lancaster, pues establece que, en condiciones de información incompleta, el consumidor está limitado a ordenar completamente su vector de preferencias sólo en aquellos bienes que son de consumo frecuente y que cuentan con una gran variedad de marcas en el mercado (como los alimentos). Para el resto de los bienes que no cumplen con estas dos últimas características, y que caen en los otros tres "casos límite", el consumidor experimenta estados subóptimos en la maximización de su utilidad en virtud de que no le es dado conocer con exactitud sus preferencias sobre los bienes que optimizan la mezcla de sus atributos.

La introducción del concepto de martingala en el análisis de los "casos límite" da a los criterios de maximización de utilidad una regla de paro óptimo (*optimal stopping*) que estaba ausente en la literatura de las FUMAT. Con esa regla, el consumidor puede experimentar distintos niveles de utilidad según la complejidad de los bienes o, mejor dicho, según las restricciones que enfrenta en cada una de las variables de control ($T(D)$, r y m). Una mayor frecuencia en el consumo de un bien complejo, o mayor valor en $T(D)$, produce, por ejemplo, incrementos mayores en los niveles de utilidad del consumidor que en los de un bien simple, porque su consumo adicional agrega información no redundante a su vector de preferencias sobre los atributos del bien.[5] Para ilustrar esto, compárese la compra de un bien sencillo (como un helado de limón) con la de un bien complejo (como una máquina de control numérico). En el primer caso, el número y calidad de los atributos que maximiza la utilidad del consumidor son conocidos rápidamente tras la adquisición de cualquiera de las marcas disponibles en el mercado (ya que, por definición, r tiende a ser igual al número de bienes distintos con la misma calidad, m, que se encuentran en el mercado). En estas circunstancias, el consumo de un helado adicional (en el periodo $t + 1$) no agregará información relevante al vector de atributos ya descubierto por el individuo en el primer helado (en el periodo t), por lo que el valor esperado de la utilidad derivada de los atributos del helado de limón en el periodo $t + 1$ será igual al del valor esperado en el periodo t (lo cual define una martingala). Cuando la

[5] Como veremos más adelante, la actualización del vector de preferencias del consumidor se concreta a través de lo que Lancaster llama la matriz **B** o matriz de tecnología de consumo. Las preferencias están definidas sobre los atributos y, en principio, conservan todas las propiedades enunciadas para los bienes, a menos que se especifique lo contrario (como sucede en el caso de "traslape" de atributos pertenecientes a bienes distintos).

diferencia del valor esperado de la utilidad entre los dos periodos es cero, es decir cuando el "juego es justo", el consumidor no encontrará incentivos para desviarse de la mezcla óptima de atributos descubierta en el periodo t y, en consecuencia, detendrá su consumo.[6]

En cambio, cuando el bien bajo consideración es complejo (esto es, que $r > m$), el consumo de unidades adicionales a través de varios periodos de tiempo (mayor $T(D)$) agregará información relevante sobre aquellos atributos que estaban ausentes o en cantidades insuficientes en la compra, digamos, de la primera máquina. El conocimiento progresivo de atributos que hagan funcionar mejor la máquina de control numérico, producirá un incremento en el valor esperado de la utilidad del consumidor en los periodos $t+1$ respecto a los periodos t (lo cual define una submartingala) que impulsará la renovación del equipo hasta el momento en que el usuario de la máquina considere que los atributos de la unidad adquirida satisfagan ciertos estándares de producción (por lo que sólo hasta entonces parará su proceso de experimentación en la compra).

Las consecuencias de la aplicación de esta regla sobre la conducta del consumidor son diversas en cada uno de los "casos límite". Con excepción de las trayectorias de consumo que describen una martingala, el documento muestra que los diferentes estados de equilibrio resultantes de combinar las tres variables de control, producen demandas crecientes o decrecientes por ciertos bienes de acuerdo con el nivel de conocimiento adquirido por el consumidor en su proceso de aprendizaje. Así tenemos por ejemplo que, contrario al consumidor de helados de limón, el operario de la máquina aumentará su demanda por equipo nuevo, periodo tras periodo sin importar el precio (suponiendo que la restricción presupuestaria no es compulsiva), por la sencilla razón de que espera una mayor utilidad futura de su nueva mez-

---

[6] El periodo de experimentación en el consumo se detiene, porque la regla de *optimal stopping* opera cuando la varianza en la elección de los atributos preferidos sobre un bien es cero. En caso de que los bienes posean vectores de atributos ortogonales entre sí, bastará con consumir un bien de cada variedad para lograr que la regla funcione y, así, obtener la mezcla óptima de atributos que maximice la utilidad del consumo. El análisis no cambia si consideramos la compra de un bien nuevo de la misma variedad o la compra de bienes de distinta variedad en cada periodo (el modelo que más adelante proponemos supone, por simplicidad, que el consumidor sólo puede consumir un bien distinto en cada periodo). El supuesto implícito en la regla es que un individuo detendrá el consumo del bien o de los bienes cuya mezcla de atributos maximice el valor esperado de su utilidad sólo en el periodo de experimentación (también llamado horizonte de planeación). La cantidad óptima de bienes en el modelo aquí presentado no es más que la combinación de bienes para los cuales la varianza en la elección de sus atributos es cero en un periodo determinado.

cla de atributos.[7] El planteamiento general de estas conductas en un modelo intertemporal de consumo bajo condiciones de información incompleta y su análisis pormenorizado en cuatro casos límite constituyen la principal aportación de este trabajo a la literatura de las FUMAT.

El documento se divide en tres secciones que analizan, por separado, el estado actual de la literatura y la contribución de nuestro modelo. En la primera parte se hace una breve presentación del modelo de optimización original que Lancaster y otros autores (en concreto Keeney y Raiffa, 1976) desarrollaron en su versión determinista, seguido de una discusión acerca de las ventajas y desventajas de su aplicación en el estudio de la conducta del consumidor. En la segunda sección se plantean las condiciones que debe reunir un modelo estocástico general diseñado para capturar el proceso de aprendizaje del consumidor en condiciones de información incompleta. El modelo expande el análisis original de Lancaster a ambientes estocásticos y, por sus características, constituye una innovación dentro de la literatura de las FUMAT. Finalmente, en la tercera sección, se ensaya un modelo lineal que incorpora las principales propiedades del modelo estocástico general con el fin de conocer el proceso de aprendizaje del consumidor en los cuatro casos límite ya mencionados. Las conclusiones discuten los principales resultados teóricos alcanzados.

[7] Al respecto, Nordhaus (1997) señala que algunos bienes que, con el paso del tiempo, modifican su número y calidad de atributos pueden aumentar o disminuir la utilidad del consumidor, sin importar que sus precios reales se hayan incrementado. En particular, encuentra que si se consideran los cambios en los atributos del servicio de energía eléctrica debido a las innovaciones en procesos y productos, el precio "verdadero" de la luz en Estados Unidos sería 1 000 veces menor que el precio oficial registrado entre 1850 y 1992. Igualmente, Carreón (1998) sostiene que el precio oficial de la gasolina en Estados Unidos es superior en 3.2% anual, en promedio, al "verdadero" entre 1925 y 1992. En términos de horas de trabajo necesarias para cubrir el costo de transportar una tonelada a una velocidad de 40 millas por hora en una distancia de 100 millas, el autor calcula que, de considerarse las innovaciones en los atributos de la gasolina (por ejemplo, mejoras en el octanaje), éstas serían de 1.5 horas de trabajo en 1925 contra 8 minutos en 1992. En ambos ejemplos, el consumidor experimenta un aumento en su utilidad debido al menor precio "verdadero" que tiene que pagar por disfrutar un número mayor de nuevos atributos, aun cuando el precio oficial de los bienes en cuestión se haya incrementado.

I. El estado actual de la literatura sobre las FUMAT

I.1. Condiciones para la optimización del consumo en el modelo de Lancaster

La condición necesaria para la optimización de modelos de consumo que incorporan funciones de utilidad tradicionales es la existencia de una relación monótona decreciente entre la utilidad marginal y la cantidad consumida de bienes. Esto supone que las preferencias mantienen una correspondencia directa con los bienes y las unidades en que se mide el presupuesto y, por lo tanto, que las funciones de utilidad y la restricción presupuestaria están definidas en el mismo espacio de bienes.[8]

En las FUMAT la correspondencia es mucho más compleja, pues la utilidad que deriva el consumidor es una función implícita, $G(\mathbf{z})$, de la mezcla particular de atributos ($\mathbf{z}$) en los bienes ($\mathbf{x}$), que da como resultado que $U = U(\mathbf{x})$ y $\mathbf{x} = G(\mathbf{z})$. En consecuencia, la forma convencional de analizar la conducta del consumidor es también más compleja, debido a que las propiedades sobre el ordenamiento de las preferencias están mediadas ahora por una intrincada relación entre los atributos ($\mathbf{z}$), los bienes ($\mathbf{x}$), las actividades de consumo ($\mathbf{y}$) y la restricción presupuestaria $\mathbf{px} \# y$.[9] La relación entre estas cuatro dimensiones no es siempre directa y, por consiguiente, no siempre están definidas en el mismo espacio, a diferencia de lo que ocurre en la teoría de la utilidad tradicional (TUT).

De acuerdo con el nuevo enfoque, los consumidores ordenan sus preferencias por la utilidad que les brindan los atributos, los cuales, sin embargo, no pueden ser comprados directamente en el mercado. Y dado que los consumidores sólo pueden comprar bienes, éstos deben fungir como *mecanismos de transferencia* de ciertos atributos que son incluidos en diferentes proporciones en cada bien. La conducta racional del consumidor consiste, entonces, en comprar diferentes cantidades de productos diferenciados que le permitan obtener una combinación óptima de atributos.

---

[8] "En el análisis tradicional del consumidor, tanto la restricción de presupuesto como la función de utilidad están definidas en el mismo espacio [de bienes], por lo que podemos inmediatamente relacionar las dos en un diagrama de curvas de indiferencia", Lancaster (1966, p. 137).

[9] Es necesario distinguir entre y, el ingreso en la restricción presupuestal, y $\mathbf{y}$, el vector de actividades de consumo.

El problema radica en cómo determinar el consumo óptimo de un grupo de productos que poseen diferente número y proporción de atributos. Lancaster (1966) propone: *a)* establecer una relación entre la actividad de consumo y los bienes consumidos en esa actividad, por ejemplo $\mathbf{x} = \mathbf{Ay}$, donde $\mathbf{x}$ es el vector de bienes, $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes a_{ij} que son determinados por las propiedades intrínsecas de los bienes, y $\mathbf{y}$ es el vector de actividades de consumo;[10] y *b)* encontrar la relación entre el vector de la cantidad de atributos $\mathbf{z}$ y el vector $\mathbf{y}$, digamos $\mathbf{z} = \mathbf{By}$, donde $\mathbf{B}$ es la llamada "tecnología de consumo".

Una vez hecho esto, lo que resta es resolver un sistema como (1), en donde la función objetivo es $U(\mathbf{z})$:

$$
\begin{gathered}
\text{Max } U(\mathbf{z}) \\
\text{Sujeto a: } \mathbf{px} \# y \\
\mathbf{z} = \mathbf{By} \\
\mathbf{x} = \mathbf{Ay} \\
x_j, z_i, y_k, \$ 0, \ \forall j = 1,..., n;\ i = 1,..., r;\ k = 1,..., m
\end{gathered} \tag{1}
$$

La optimización de este sistema requiere establecer cuatro condiciones básicas. La primera consiste en relacionar $\mathbf{z}$ y $\mathbf{x}$, dado un número de r características, m actividades y n bienes. En particular, si $r = m = n$ y $\mathbf{A}$ es invertible, la optimización de (1) será igual al caso tradicional en el que hay correspondencia biunívoca entre $\mathbf{z}$ y $\mathbf{x}$. La razón es que, dado que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ son matrices cuadradas, $U(\mathbf{z})$ puede expresarse como $U(\mathbf{x})$, haciendo primero que $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ y, luego, que $\mathbf{z} = \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{x}$. En estas circunstancias, las propiedades convencionales sobre las preferencias se mantendrían puesto que sólo habría una manera óptima de elegir entre dos colecciones $\mathbf{x}_i$ de bienes.

La situación cambiaría si $r ? m$, $r ? n$, o $m ? n$, en virtud de que en estos casos habría diferentes grados de libertad para escoger $\mathbf{y}$ y, por lo tanto, también habría diferentes elecciones de $\mathbf{z}$ para un $\mathbf{x}$ dado. La selección óptima no tendría una trayectoria única debido a que podrían presentarse "traslapes" en los atributos de varios bienes que harían que el consumidor escogiera indistintamente cualquier bien (digamos en caso de que $r < m$ y $m > n$), lo cual impediría garantizar,

---

[10] Deaton y Muellbauer (1980, pp. 250-253) llaman a este enfoque el "modelo de características lineales", y establecen sus orígenes en el análisis de dietas, que fue tratado por Cornfeld, Stigler y Dantzig en la década de los cincuenta.

por ejemplo, la existencia de insaciabilidad local o de monotonicidad fuerte.[11]

La segunda condición requerida para optimizar el sistema (1) es la homogeneización de los espacios de unidades. Mientras que la función objetivo $U(\mathbf{z})$ está definida en un espacio de atributos, la restricción $\mathbf{px}$ # y se expresa en un espacio de bienes. La homogeneización puede hacerse transformando $U(\mathbf{z})$ al espacio de bienes, o bien, siguiendo el proceso inverso: operando en el espacio de atributos mediante la conversión de la restricción presupuestaria. En ambas situaciones existirían nuevas funciones de utilidad, ya sea en términos de bienes o de atributos, que serían generadas por una nueva ecuación de transformación $\mathbf{z} = \mathbf{Bx}$, que es la encargada de relacionar las r características con los n bienes. Con la utilización de esta ecuación, el modelo requeriría condiciones de optimización más complejas que en el análisis tradicional debido a la presencia de la matriz $\mathbf{B}$.

La tercera condición se refiere, precisamente, a las características que debe reunir la matriz $\mathbf{B}$.[12] En términos generales, la optimización del consumidor será exactamente igual a la establecida por la TUT si la matriz $\mathbf{B}$ es una permutación diagonal y $r = m$. En las demás situaciones, la optimización cambiaría radicalmente, aun manteniendo la igualdad entre r y m, ya que en este caso los objetos de utilidad no serían bienes individuales sino bienes compuestos. El problema podría complicarse todavía más si se consideraran las posibles combinaciones resultantes de las desigualdades entre r y m ($r > m$ o $r < m$).

La última condición que hay que tener en cuenta al optimizar (1) se refiere a las diferentes formas funcionales que puede adoptar una FUMAT. Sobre este punto, Keeney y Raiffa (1976) proponen dos conceptos básicos de independencia entre atributos que permiten simplificar la forma de las funciones de utilidad. Cada concepto implica la existencia de una forma funcional distinta, por lo que es importante

---

[11] Hay y Morris (1991) sostienen que en las FUMAT siempre serán válidos tres supuestos tradicionales del análisis del consumidor; a saber: *1)* se preferirán más características o atributos que menos, *2)* los consumidores expresan preferencias consistentes sobre un conjunto de atributos y, *3)* la tasa marginal de sustitución es decreciente a lo largo de una curva de indiferencia en el espacio de atributos. Esta afirmación debe ser matizada, puesto que en caso de que no haya *función de compensación* para ciertos atributos, no se podría garantizar la validez de algunos supuestos. La *función de compensación* es utilizada por Lancaster, siguiendo el análisis de Chamberlin, para definir la curva de demanda de cada uno de los grupos diferenciados, así como de los grupos como un todo.

[12] Lancaster supone que las actividades guardan una relación unívoca con los bienes ($m = n$), con el fin de simplificar el modelo y centrar la atención en las diferencias observadas entre el número de características y el número de bienes.

elegir cuidadosamente aquel que relacione más adecuadamente los atributos de los bienes bajo observación.

El primer concepto es el de *independencia en preferencias*. Keeney y Raiffa sostienen que el conjunto de atributos *Y* es independiente en preferencias del conjunto complementario *Z*, si y sólo si para alguna $\mathbf{z}'$, $\left[(\mathbf{y}',\mathbf{z}') \succeq (\mathbf{y}'',\mathbf{z}')\right] \Rightarrow \left[(\mathbf{y}',\mathbf{z}) \succeq (\mathbf{y}'',\mathbf{z})\right]$, $\forall\, \mathbf{z}, \mathbf{y}9, \mathbf{y}0$;[13] en otras palabras, las preferencias sobre los niveles de los atributos que están en el conjunto *Y* no sufrirán cambios a causa de los valores de los atributos que están en su complemento *Z*. El segundo concepto, llamado *condición fuerte de independencia*, asegura que si cada subconjunto de atributos es independiente en preferencias de su complemento, se dice que los atributos son *mutuamente independientes en preferencias*.[14] Entre más fuerte es el tipo de condición de independencia que corresponde a un subconjunto de los atributos, más simple es la forma de la función de utilidad que puede emplearse en el problema de optimización.

I.2 Ventajas y desventajas en la utilización de las FUMAT

La optimización de (1) enfrenta regularmente dos tipos de críticas: la innecesaria complicación introducida por las FUMAT y la falta de consenso en la definición de la forma de las funciones. Respecto a la primera crítica no hay mucho que agregar, pues es evidente que pocas veces es posible encontrar formas cerradas a la solución de la ecuación de Jacobi-Hamilton-Bellman para el sistema (1) y, por lo mismo, no siempre se puede contar con la familia de controles, o los jacobianos, que determinen las trayectorias óptimas de consumo (para mayores detalles, véase Ramírez y Goddard, 1998). Así que es difícil estar en desacuerdo con Deaton y Muellbauer (1980, p. 244) cuando afirman que "la distinción entre preferencias y restricciones es limitada, y las 'explicaciones' ofrecidas por el [nuevo] enfoque algunas veces son formas complicadas de interpretar aspectos muy sencillos". La segunda crítica, en cambio, es más debatible, debido a que la mayoría de los trabajos utiliza funciones basadas en estrategias compensatorias aunque

[13] Donde $(\mathbf{y}',\mathbf{z}') \succeq (\mathbf{y}'',\mathbf{z}'')$ significa que el conjunto de atributos ($\mathbf{y}9, \mathbf{z}9$) es preferido al conjunto ($\mathbf{y}99, \mathbf{z}99$).

[14] También se pueden definir condiciones de independencia incorporando loterías sobre los atributos. La *independencia en utilidad* es la condición equivalente a la *independencia en preferencias* cuando se incorporan loterías, y la *independencia aditiva* es la condición equivalente a la *independencia mutua en atributos*.

no todos con la misma forma funcional (aditiva, lineal o no lineal).[15] El problema radica, en todo caso, en los supuestos de independencia que tienen que hacerse para asegurar la compensación del consumo de un atributo por otro, y esto ya ha sido resuelto, como acabamos de ver, por Keeney y Raiffa (1976).

La pertinencia de estas críticas no reduce, sin embargo, las posibilidades que ofrece el nuevo enfoque para modelar las decisiones de los consumidores dentro de un marco más general. Al proponer que la utilidad proviene de los atributos, y que cada bien es una mezcla de varios atributos, los modelos con FUMAT ofrecen una idea más realista de la conducta del consumidor en la práctica. La abstracción de todas las propiedades intrínsecas de los bienes por parte de la TUT, si bien ha permitido simplificar las soluciones, también ha creado vacíos dentro de la teoría económica que pueden ser parcialmente llenados con el auxilio de las FUMAT.

El vacío más insistentemente citado por la literatura se refiere al estrecho enfoque adoptado por la TUT para explicar los diferentes *grados de relación* que existe entre un bien y otro. Las funciones de utilidad tradicionales plantean esencialmente la existencia de un atributo por bien y, por lo tanto, cada bien es completamente distinto del otro si su único atributo es diferente.[16] Con las funciones sobre atributos, en cambio, es claro que las diferencias en la utilidad entre los bienes pueden obedecer al cambio de una sola característica; por lo que aquí el rango de sustitución y complementariedad entre los bienes es más amplio, así como la *distancia* entre ellos es menor.

Al modelar la *distancia* intrínseca entre productos, este enfoque permite también anticipar con mayor precisión las reacciones de los consumidores a bienes diferentes. Desde la perspectiva del nuevo enfoque, si un individuo consume un bien nuevo, esto "simplemente significa la adición de una o más actividades a la tecnología de consumo" (Lancaster, 1966, p. 149).[17] Pero a diferencia de lo que plantea la TUT,

---

[15] Mientras que las estrategias compensatorias permiten comparar los atributos y compensar la variación en la utilidad producida por un atributo con la modificación en el nivel de utilidad de otro atributo, en las estrategias no compensatorias, como su nombre lo indica, eso no es posible.

[16] Esta relación uno a uno entre un bien y un atributo es un supuesto muy fuerte. En el mundo real es difícil encontrar bienes que puedan ser caracterizados por una sola dimensión; es mucho más común ver bienes con varios atributos y, por esto mismo, el mayor realismo del nuevo enfoque es claro.

[17] Asimismo, se puede considerar a un bien diferenciado típicamente como "un bien nuevo dentro de un grupo intrínseco de bienes existente, y analizar a este nuevo bien dentro de este grupo. Algunas veces aparecen bienes de un carácter más fundamental cuyas características cortan a las de los grupos existentes" (Lancaster, 1966, p. 150).

esa adición es *separable* en el sentido de que permite identificar los efectos específicos del nuevo bien sobre la tecnología de consumo (o la parte relevante de ella) y las características intrínsecas de las actividades de todos los demás bienes. Con las funciones sobre bienes, la posibilidad de tal separación no es tan precisa porque los efectos del nuevo bien se presentan en bloque, es decir, no se conocen los resultados al nivel de sus características ni de sus actividades.

En caso de que el individuo cuente con información incompleta acerca de los bienes que existen en el mercado, el supuesto de adición en el consumo es todavía más importante para predecir su trayectoria de consumo futura. Bajo el entendido de que el consumidor "aprende sin olvidar", la relación $\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{y}$ se encarga de actualizar la utilidad reportada por los atributos en cada periodo en forma más eficiente ya que, al ignorar aquellos atributos ya consumidos previamente e incorporar a los de reciente consumo, reduce progresivamente la varianza en la elección de la mezcla óptima de sus bienes en el tiempo.

II. La extensión del modelo de Lancaster a ambientes estocásticos: aprendizaje en el consumo con información incompleta

Para probar las bondades de este último argumento, hemos adaptado el sistema (1) a situaciones en las que el consumidor "aprende consumiendo" en un ambiente de información incompleta. Debido a que el modelo estocástico resultante es muy abstracto y general, nos limitaremos a ofrecer una descripción muy agregada de sus principales elementos constitutivos.[18] Las soluciones a casos muy concretos, y que llamamos "casos límite", son analizadas en la sección III, utilizando un modelo lineal.

II.1. Breve descripción del proceso intertemporal de consumo

El modelo supone, por simplicidad, que el consumidor compra una unidad del bien x_t que maximiza su utilidad esperada en cada periodo t, sujeto a una restricción presupuestaria $\mathbf{px}_t$ # y. El bien elegido forma

[18] La versión más desarrollada del modelo, así como sus propuestas generales de solución, basadas en la teoría de latices y en la programación dinámica estocástica, pueden encontrarse en Ramírez y Goddard (1998).

parte del conjunto de m bienes que son combinaciones de un mismo grupo de r atributos. Los atributos de cada bien están incluidos en la matriz **B**, de tamaño ($r \times m$), los cuales pueden ser observados por el consumidor. El precio de x_t es considerado un atributo más de **B**.

En virtud de que el consumidor desconoce inicialmente el valor de los parámetros α_t de su función de valor $v_t(\mathbf{z}_t)$,[19] suponemos que él no puede determinar *a priori* la utilidad esperada de cualquier bien. Él buscará, por lo tanto, elegir aleatoriamente uno de los bienes en el primer periodo y derivar la utilidad que le proporciona la mezcla de atributos de ese bien. La utilidad así calculada se integra al conjunto de información (matriz **B**) que, periodo tras periodo, el consumidor buscará acumular hasta "descubrir" la combinación óptima de atributos que maximice su utilidad esperada (y que presupone una varianza nula en el ordenamiento intertemporal de sus preferencias).

El proceso de experimentación no es de ninguna manera ilimitado, ya que hay un número máximo de *T(D)* periodos que constituyen el horizonte de planeación del consumidor. De hecho, los resultados sobre las posibles trayectorias de consumo y aprendizaje de los parámetros α_t de la función de utilidad dependen críticamente de la forma de la tecnología de consumo, de los bienes que satisfacen la restricción presupuestaria y de ese horizonte de planeación, como veremos más adelante.

II.2. El funcional objetivo y las ecuaciones del sistema de adaptación markoviano

La representación matemática de este modelo requiere, previamente, definir la relación entre el número de actividades de consumo y de bienes. Y para tal efecto supondremos, como Lancaster (1966), que hay una correspondencia biunívoca entre las actividades y los bienes, con lo cual el modelo tomaría la siguiente forma:

---

[19] Todos los parámetros que describen a los atributos están en el vector α_t. Como ya se mencionó, existe una relación entre el número de parámetros necesarios para describir una función y las condiciones de independencia que se imponen a los atributos. Para una función aditiva y lineal, el tamaño de este vector columna es ($1 \times r$), donde r es el número de atributos, mientras que para funciones más complejas el tamaño es mayor.

$$\underset{x_t}{MAX}\, E \sum_{t=0}^{T(D)} U_t\big(v_t(\mathbf{z}_t)\big) \tag{2}$$

sujeto a:

$$v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = f_t\,(v_t(\mathbf{z}_t)) \tag{2.1}$$
$$o_t = h_t(v_t(\mathbf{z}_t)); \tag{2.1.1}$$
$$\mathbf{px}_t \;\#\; y; \tag{2.2}$$
$$\mathbf{z}_t = \mathbf{Bx}_t \tag{2.3}$$
$$x_{jt},\, z_{it} \geq 0,\ \forall j = 1,\ldots, m;\ i = 1,\ldots, r;$$

donde:

x_t es la cantidad de cada bien que el consumidor representativo decide consumir en el periodo t. Por construcción, x_t es un vector columna ($m \times 1$) que contiene un 1 en la fila del bien elegido para consumir en el periodo t, y ceros en todas las otras filas, pues se supone que el agente sólo consume una unidad del bien en cada periodo; z_t es un vector columna ($r \times 1$) que especifica la cantidad de los r atributos del bien elegido en el periodo t, x_t; $v_t(\mathbf{z}_t)$: $R^r \rightarrow R$ es la función vectorial de valor estocástica sobre las cantidades de atributos en el periodo t, cuyos componentes se agrupan en el vector α_t; $U_t(\bullet)$ es una función que pondera la utilidad indirecta intertemporalmente. $T(D)$ es el número de periodos de consumo, que es una función decreciente del costo de oportunidad temporal de consumo D del grupo de bienes sobre el que el individuo maximiza su utilidad; $f_t(\bullet)$ es la función vectorial de transición de $v_t(\mathbf{z}_t)$ en el periodo t; $h_t(\bullet)$ es la función vectorial de observación de $v_t(\mathbf{z}_t)$ en el periodo t; $\mathbf{B}$ es la matriz ($r \times m$) que relaciona los atributos con los bienes; y es el vector de ingreso disponible (constante) para consumo en cada periodo; y p es un vector fila ($1 \times m$) que especifica el precio de los bienes.

A primera vista el formato de (2) es muy parecido al de (1), salvo por el hecho de que la optimización ahora es dinámica. Pero, analizado con mayor detenimiento, el nuevo sistema (2) mantiene una enorme diferencia con el modelo original de Lancaster, al suponer que la ecuación de movimiento $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = f_t(v_t(\mathbf{z}_t))$ es estocástica. Las dificultades que entraña esta modificación no son triviales porque, si bien agrega un mayor toque de realismo a los modelos de optimización con FUMAT, obliga a redefinir todo el esquema de determinación de la conducta óptima del consumidor.

En general, podemos decir que resolver este modelo de optimización estocástica, con restricciones que incluyen desigualdades en la variable de control, supone tres tipos de problemas no contemplados original-mente por el nuevo enfoque del consumidor: *a)* la definición del funcional y la dinámica de adaptación markoviana, *b)* el establecimiento de las nuevas variables y de los supuestos involucrados en la optimización y, finalmente, *c)* las soluciones analíticas de un modelo en el que los controles son conjuntos ordenados no necesariamente cóncavos.[20]

En lo que corresponde al primer tipo de problema, cabe señalar que con el abandono del supuesto de la divisibilidad de los atributos la maximización de una función objetivo $U(\mathbf{z})$ como la descrita en (1) deja de tener sentido, puesto que es poco realista sostener que el consumidor "extraerá" utilidad divisible de los atributos.[21] De aquí que la propuesta del sistema (2) se enfoque a maximizar funciones de valor, $v_t(\mathbf{z}_t)$, que representan el ordenamiento de preferencias cardinales por unidad de gasto según el peso específico concedido por cada consumidor a determinado atributo (sobre este punto, véase Keeney y Raifa, 1976).

El peso de los atributos en cada bien puede ser lineal o no lineal, seguir ordenamientos dominantes o indiferentes, o ser cambiantes para cierto grupo de bienes. La única condición importante es que el consumidor sea capaz de ponderar el peso del (los) atributo(s) de cada bien en términos del atributo(s) "más preferido(s)" según su *función de compensación*. Esto permite conocer, tal como más tarde lo sugeriría Lancaster (1991), el número de productos "vecinos cercanos" que pueden ser adquiridos por una unidad de ingreso, y, por lo tanto, la tasa marginal de sustitución entre esos productos y los que no tienen los atributos "más preferidos".

Ahora bien, como el consumidor "aprende consumiendo", su proceso de decisión sobre los atributos "más preferidos" no es determinístico y, en consecuencia, su problema de optimización consiste en *maximizar el valor esperado* de la utilidad que deriva de la función de valor $v_t(\mathbf{z}_t)$. Las ecuaciones que filtran sus decisiones a todo el sistema son las ecuaciones de movimiento, $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = f_t(v_t(\mathbf{z}_t))$, que por la naturaleza

[20] Aquí discutiremos sólo el primer tipo de problemas, debido a que en la tercera sección propondremos una solución específica al modelo (y, por tanto, se incluyen supuestos especiales para la optimización). El segundo y tercer tipo de problemas se analizan en Ramírez y Goddard (1998).

[21] Las críticas a las discontinuidades en la curva de demanda provocadas por la existencia de "vecinos cercanos" condujo a Lancaster a eliminar el supuesto irreal de que los bienes son divisibles entre sus atributos. En su lugar, definió una curva de diferenciación de productos (CDP), que muestra todas las combinaciones posibles de atributos en un bien que es producido con una unidad de recursos, y una función de compensación ya comentada. Lancaster (1991) considera a la CDP como una curva cuyos límites están representados por dos bienes extremos que poseen la cantidad máxima de un solo atributo, y utiliza a la función de compensación para analizar la sustitución entre productos diferenciados dentro de un grupo de referencia. La conclusión es que la función de compensación determina la sustitución de un producto por otro que comparte el mismo grupo de atributos, pero en distintas proporciones.

del problema son ecuaciones en diferencia estocásticas de primer orden que el consumidor deberá "resolver" (una por una) en cada periodo.

La obtención de una nueva función de valor permite al consumidor recabar mayor información sobre el ordenamiento real del resto de los atributos que están contenidos en los *m* bienes disponibles en el mercado por una sencilla razón: los bienes consumidos representan en sí información. La perturbación introducida por el mejor conocimiento de los atributos (cambios en α_t) modifica las funciones de valor del periodo anterior y, con ello, el conocimiento sobre la mezcla de bienes disponibles. En este sentido, el consumo de bienes asociados al periodo, digamos, $t+1$ (esto es, $\mathbf{x}_{t+1}(v_{t+1}(\mathbf{z}_t))$), ofrece al consumidor la oportunidad de elegir mejor su mezcla de atributos que en el periodo t (debido a que está en mejor condición de reducir la varianza de sus ordenamientos deseados).

El punto interesante es que el aprendizaje en el consumo sigue un proceso encadenado, que se traduce en tal o cual cantidad de bienes por medio de la ecuación de transformación $\mathbf{z}_t = \mathbf{B}\mathbf{x}_t$ (ecuación 2.3). Los bienes consumidos afectan las preferencias del consumidor, y éstas las funciones de valor, produciendo nuevas demandas de bienes en cada uno de los periodos sucesivos de planeación. Esto trae como consecuencia que los valores de $\mathbf{x}_t$ y $\mathbf{z}_t$ sean también estocásticos y ajustados dinámicamente por la ecuación de movimiento.

Los cambios encadenados entre las variables no son homogéneos, pues tienen un componente promedio de desplazamiento (*drift*) y otro componente que se mueve con cierta distribución de probabilidad, que corresponden a la configuración propia de una ecuación estocástica como la descrita en (3). El componente promedio, $v_t(\mathbf{z}_t)$, se refiere a la trayectoria *estable* de aprendizaje que experimenta el consumidor y que se refleja en el ordenamiento de preferencias de su función de valor dada una unidad de gasto en el tiempo t (lo cual convierte a $v_t(\mathbf{z}_t)$ en una función de utilidad indirecta ajustable en cada periodo). El otro componente, $\theta_t(\alpha_t)$ indica las variaciones de sus preferencias respecto a esa trayectoria estable a medida que se agotan los periodos de planeación $T(D)$.

$$v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) = v_t(\mathbf{z}_t) + \theta_t(\alpha_t) \qquad (3)$$

Las características de este segundo componente son esenciales para la optimización de (2) pues, al ser $\theta_t(\alpha_t)$ el único vector exógeno que hace que el pasaje de $v_t(\mathbf{z}_t)$ a $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1})$ sea aleatorio (aun manteniendo los controles fijos), de ellas depende todo el mecanismo de transición del sistema. Debido a esto, es importante asociarle un proceso estocástico contable a α_t, que incorpore la condición encadenada de aprendizaje de los diferentes estados del sistema. La propuesta adecuada, por razones más adelante explicadas, es considerar a α_t como una variable aleatoria que se comporta como una cadena de Markov reversible, de primer orden y con periodo *d* definido (esto es, formada exclusivamente por estados transitorios):[22]

$$P\{\alpha_{t+1} = j \mid \alpha_t = i, \alpha_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, \alpha_1 = i_1, \alpha_0 = i_0\} = P_{i,j}$$

La interpretación de esta cadena no es directa, pues de poco sirve decir que la probabilidad P_{ij} de pasar al estado α_{t+1}, dado que se está en α_t, es dependiente sólo de este último, si α_{t+1} es también dependiente de la función de valor. Más bien, lo que debe resaltarse es que la probabilidad P_{ij} de cualquier transición refleja el nivel de utilidad (o superficie de indiferencia-precio de los atributos que son cercanos) alcanzado por el consumidor ante cualquier cambio en su *función de compensación.*

Así tenemos que si P_{ij} es positivo, el consumidor podría encontrar que el ordenamiento de preferencias de su antigua función de valor es, por varias razones, susceptible de mejorarse. Bajo esa condición, los estados transitorios de la cadena previos a la terminación de su periodo de planeación $T(D)$ serían, desde su punto de vista, estados de equilibrios subóptimos debido a que, como se explica en Ramírez y Goddard (1998), definirían una submartingala en la selección óptima de sus atributos.[23] Del mismo modo, si P_{ij} es cero, denotando la existencia de estados recurrentes en el periodo $T(D)$, el consumidor podría concluir que la experimentación con nuevas funciones de valor no mejoraría sus expectativas de consumo, o bien, que la restricción presupuestaria sobre sus controles se habría vuelto obligatoria. En este caso,

---

[22] La condición de que sea reversible la cadena de Markov es importante para utilizar las técnicas de programación dinámica (en su versión "*backward induction*" u optimización "hacia atrás"). Asimismo, se requiere que la cadena sea finita porque el horizonte del consumidor también es finito. Véanse Ross (1996); Feldman y Váldez-Flores (1996); Isaacson y Madsen (1976) o Williams (1979), para obtener mayor información acerca de las cadenas de Markov y sus propiedades.

[23] Un proceso estocástico es una martingala si $E[\mid Z_n \mid] < \sim$ y $E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots Z_n] = Z_n$; una supermartingala si $E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots Z_n] < Z_n$; y una submartingala si $E[Z_{n+1} \mid Z_1, Z_2, \ldots Z_n] > Z_n$, donde Z_t (para $t = 1, \ldots, n$) puede ser cualquier variable de estado, como (en nuestro caso) $v_t(\mathbf{z}_t)$. Intuitivamente esto quiere decir que si un consumidor experimenta una martingala en su utilidad esperada en el periodo *t*, sus niveles de satisfacción no cambiarán en el periodo $t+1$, aun con mayores adiciones de bienes consumidos. En ese punto, el consumidor habrá descubierto su mezcla óptima de atributos. En caso de que no sea así, necesitará probar nuevas unidades de bienes para mejorar sus niveles de utilidad (supermartingala), o bien, suspender el consumo de nuevas unidades debido a que sus niveles de utilidad sucesivos son inferiores a los registrados

el consumidor experimentaría un equilibrio estable o, dicho con mayor precisión, una martingala en la selección de sus atributos. Una cadena con probabilidad positiva de regresar a un ordenamiento anterior definiría, en este contexto, una supermartingala en su proceso de aprendizaje.

La importancia de elegir una cadena de Markov con estas características es más evidente cuando el vector de las variables de estado $v_t(\mathbf{z}_t)$ no puede ser observado directamente sino por medio de la ecuación de información $o_t = h_t(v_t(\mathbf{z}_t))$. Ésta es la situación que se presenta cuando el consumidor elige sus atributos de acuerdo con un modelo de selección preestablecido (digamos con una función de valor lexicográfica), que no necesariamente coincide con los atributos observados en el conjunto disponible $\Omega_t = \{o^t, x^{t-1}, t\}$; donde los superscriptos indican la colección de variables consideradas, por ejemplo $x^{t-1} = \{x_o, ..., x_{t-1}\}$.[24] En este caso, el procedimiento para inferir $v_t(\mathbf{z}_t)$ de o_t es, simplemente, dándole una forma funcional aditiva a 1.1 como en (4).

$$o_t = v_t(\mathbf{z}_t) + \zeta_t \tag{4}$$

Lo que sugiere esta ecuación es que, debido a que los atributos reales de los bienes son aleatoriamente seleccionados con arreglo a un vector de desviación ζ_t, cualquier política de control óptima del consumidor, π_t, deberá, en consecuencia, ser obtenida recursivamente. La razón es que, con selecciones sesgadas por un modelo de elección de atributos, es imposible calcular, como en efecto sucede cuando $v_t(\mathbf{z}_t) = o_t$, una política óptima para cada $v_t(\mathbf{z}_t)$. En estos casos, las políticas de control estarían definidas, más bien, por secuencias de distribuciones de probabilidad en las que el control en el tiempo t dependería de la colección de observaciones o^t y de los controles pasados x^{t+1}, esto es:

$$p_{\pi_t}(v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) \mid v_t(\mathbf{z}_t), o^t) = p\,[v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1}) \mid v_t(\mathbf{z}_t), x_t = \pi_t(o^t, x^{t-1})] \tag{5}$$

Las condiciones para encontrar la secuencia (5), también llamada secuencia de optimización de *feedback*[25] (en oposición a la optimización

en el periodo anterior (submartingala). La utilidad esperada, vista así, puede presentar distintas situaciones de equilibrio en la conducta del consumidor, que no han sido ampliamente exploradas por la TUT. En la sección III daremos una definición más amplia de los procesos de martingalas.

[24] Si denotamos por Ω_t al conjunto de información disponible para el consumidor en el periodo t, entonces se dice que $v_t(\mathbf{z}_t)$ es observado exactamente cuando $v_t = \{\upsilon_t(Z_t), u^{t-1}\}$, en caso contrario $\Omega_t = \{o^t, u^{t-1}, t\}$. En el primer caso $v_t(\mathbf{z}_t) = O_t$, en el segundo $v_t(\mathbf{z}_t)$ tiene que ser relacionado con los datos observados o_t por medio de la ecuación 2.1.1 del sistema (2).

[25] "Conceptualmente lo que distingue a las estrategias *feedback* de las estrategias *open loop* es que una estrategia *feedback* consiste en un plan de contingencia que indica lo que es mejor

de *open loop*), parten de estimar recursivamente o^t, lo cual es factible, si y sólo si, las densidades condicionales $p(v_t(\mathbf{z}_t) \mid o^t, x^{t-1})$ y $p(o_{t+1} \mid o^t, x^t)$ son disponibles, los vectores $\theta_t(\alpha_t)$ y ζ_t de las ecuaciones (4) y (5) son mutua y serialmente independientes (y además con densidades de probabilidades conocidas) y las ecuaciones 2.1 y 2.1.1 contienen sólo parámetros conocidos (Aoki, 1989). Estas condiciones, en su conjunto, son satisfechas si existe un plan o regla de Markov que garantice que o_t sea un estadístico *suficiente* de $v_t(\mathbf{z}_t)$, o lo que es igual, que haga que: $p(v_t(\mathbf{z}_t) / o^t) = p(v_t(\mathbf{z}_t) \mid o_t)$ y que $p(o_{t+1} \mid o^t, x_t) = p(o_{t+1} \mid o_t, x_t)$.

La interpretación de estos resultados es muy importante para la comprensión del fenómeno de aprendizaje. En particular, si el consumidor desconoce inicialmente el conjunto disponible de atributos que puede adquirir a través de la compra de bienes (dada su restricción presupuestaria), esto no será un obstáculo para determinar su control óptimo, pues la existencia de una regla de Markov le permitirá inferir su función de valor (regulado por la ecuación 2.1) de la función de observación actualizada (ecuación 2.1.1). La forma en que el consumidor logra hacer esa inferencia, o más formalmente derivar el control óptimo x_t^* como una función de o_t en vez de o^t, es mediante el ajuste de la secuencia (5) de las dos ecuaciones anteriores, que son llamadas ecuaciones markovianas de adaptación. Con estas ecuaciones, el consumidor estará en condiciones de realizar ajustes cada vez más finos de su ordenamiento de preferencias, debido a que la cantidad de bienes que elige en el periodo t (de donde obtiene la mezcla óptima de atributos) contiene toda la información *observada* de los periodos $t-1$.

Cuando el modelo de selección es igual al observado y, por lo tanto no es necesaria la ecuación 2.1.1, los ajustes de ordenamiento de preferencias son aún más rápidos. La razón estriba en que la ecuación de transición (2.1), garantiza que $v_{t+1}(\mathbf{z}_{t+1})$ pueda ser obtenida de $v_t(\mathbf{z}_t)$ y de x_t y, en consecuencia, el consumidor no tendrá la necesidad de ajustar su modelo de selección (dado por sus funciones de valor) a los datos observados (atributos de bienes ya experimentados).

La cualidad de encadenar los ordenamientos de preferencias mediante procesos estocásticos *con memoria absoluta actual*, hace que las ecuaciones markovianas de adaptación sean adecuadas para modelar secuencias de decisiones que requieren equilibrios intertemporales. La elección de cualquier ordenamiento de atributos con estas ecua-

hacer para cada valor de la variable estado en cada punto del tiempo, en vez de sólo hacer lo mejor para cada punto del tiempo desde el inicio [del horizonte de planeación]" Kamien y Schwartz (1991, p. 275).

ciones asegura que la utilidad derivada por el consumidor en un periodo determinado sea al menos igual que la de los periodos antecedentes. El conocimiento progresivo de la cantidad y tipo de bienes que garantizan la mezcla óptima de atributos es un medio para eliminar la incertidumbre que experimenta el consumidor al desconocer alguna información sobre los bienes. Sin embargo, ese conocimiento no siempre conduce a una reducción en la varianza de su ordenamiento de preferencias, por lo que es posible observar diferentes situaciones de equilibrio de los que se obtendrían con información completa.

III. Trayectorias de consumo y aprendizaje en un modelo lineal

La discusión de cada uno de los elementos constitutivos del sistema (2) es heurísticamente muy sugestiva, pero poco útil si no ofrece una solución analítica. Así que para darle sentido a la discusión anterior se analizan las trayectorias de consumo y aprendizaje asociadas a distintas combinaciones en **B** y en *T(D)*.

El procedimiento empleado consta de tres pasos ilustrados por un modelo lineal, que tiene la virtud de reproducir todos los elementos esenciales del sistema (2), pero con supuestos menos generales. En el primer paso se definen las restricciones temporal y de mercado que dependen de los parámetros *m, r* y *T(D),* a fin de analizar cuatro "casos límites" que arrojan distintos resultados de aprendizaje. La presentación de los resultados incluye la demostración de una proposición para el caso en que la restricción presupuestal no afecta la decisión óptima de consumo (es decir, cuando todos los productos tienen un precio menor al ingreso). En el segundo paso, se ejemplifica cada uno de los "casos límites" de aprendizaje. Finalmente, en el tercer paso, se estudian los cambios de aprendizaje esperados cuando la restricción particular afecta, la decisión óptima de consumo.

III.1. Restricciones temporal y de mercado

De acuerdo con la forma de la matriz **B** y del número de periodos de consumo, se pueden distinguir cuatro casos límites que resultan de igual número de restricciones sobre los valores de *T(D)*, *r* y *m.* Estas restricciones, que son utilizadas para evaluar cada uno de los casos límite, se definen de la siguiente manera:

Definición 1 (restricción temporal): **Existe una restricción temporal cuando el número de periodos de consumo es menor que el número de atributos,** $T(D) < r$

Esta restricción se aplica a aquellos productos con un costo de oportunidad temporal muy alto, D, ya sea por el tiempo de búsqueda del producto o por su durabilidad, tales como casas, automóviles, muebles, aviones y maquinaria pesada. Por ejemplo, en casos como los automóviles, en donde el tiempo de consumo es bastante alto, las personas tendrán un $T(D)$ bajo comparado con el número de atributos incluidos en dicho bien, tales como peso, velocidad máxima o comodidad.

Definición 2 (holgura temporal): **Existe holgura temporal cuando hay un número mayor o igual de periodos de consumo que de atributos,** $T(D) \ \$ \ r$

La holgura temporal tiene exactamente el significado opuesto al de restricción temporal, pues la condición se cumple en bienes de consumo frecuente, que poseen una durabilidad y un tiempo de búsqueda bajos. Los grupos de bienes que están en este grupo incluyen artículos como alimentos, bebidas, electricidad, luz eléctrica, etc., en los que el número de periodos de consumo supera a las medidas de la complejidad del bien.

Definición 3 (restricción de mercado): **Existe una restricción de mercado cuando hay menos productos que atributos en el mercado** $(m < r)$

Esta situación se presenta en sociedades poco desarrolladas o en industrias que experimentan una baja diversificación de sus productos. En este último grupo se incluye a las industrias del gas, electricidad, servicios telefónicos y algunos farmacéuticos. También se pueden mencionar las industrias de alta complejidad, como la de maquinaria pesada, en las que las opciones producidas son mucho menores que el número de atributos técnicos necesarios para describirlos.

Definición 4 (holgura de mercado): **Existe holgura de mercado cuando hay mayor o igual número de productos que de atributos,** $(m \ \$ \ r)$

La holgura de mercado existe en bienes con diversificación del producto relativamente mayor a la complejidad del mismo. Esta condición se cumple en bienes en los que existe un gran número de oferentes de productos distintos, como es el caso del mercado inmobiliario, alimentos, papelería, muebles, etcétera.

Cuadro 1. Productos existentes en cada tipo de mercado

	Productos con holgura temporal (baja durabilidad)	*Productos con restricción temporal (alta durabilidad)*
Productos con holgura de mercado (complejidad baja del producto con respecto al mercado)	Bienes de consumo en industrias competitivas como alimentos y papelería.	Bienes de consumo durables como casas, muebles y refrigeradores.
Productos con restricción de mercado (complejidad alta del producto con respecto al mercado)	Bienes de consumo en industrias monopólicas tales como electricidad, gas, agua y farmacéuticos. Bienes intermedios.	Bienes de capital como maquinaria pesada. Bienes tecnológicamente sofisticados como aviones o misiles.

Las combinaciones resultantes de estas restricciones se ilustran en el cuadro 1.

III.2. El estudio del aprendizaje y de las decisiones de consumo en un modelo lineal

Cada una de estas restricciones cobra sentido si se las relaciona con los diferentes equilibrios que un individuo experimenta en su proceso de aprendizaje en el consumo. Para esto se plantea un modelo con los siguientes supuestos.

El primer supuesto del modelo es que la FUMAT es lineal. Por lo tanto, el vector α_t tiene *r* elementos que el consumidor desconoce inicialmente, pero que va descubriendo a medida que consume bienes diferentes; esto es:

$$v_t(\mathbf{z}_t) = \alpha_t \mathbf{z}_t = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{it} z_{it}$$

El segundo supuesto es que el individuo "aprende sin olvidar" los valores estimados de $\alpha_t (\hat{\alpha}_t)$ o, lo que es igual, que la utilidad estimada de un bien que ya ha sido consumido no se modifica al conocer nuevos bienes. En otras palabras, la utilidad estimada que un consumidor deriva de un bien en el momento 1 debe ser igual a la utilidad estimada en todos los periodos posteriores. Por lo tanto, debe satisfacerse la siguiente condición en cada periodo *t*:

$$\hat{\alpha}_t \mathbf{z}_{k-1} = \hat{\alpha}_{l-1} \mathbf{z}_{k-1} = v_{k-1}(\mathbf{z}_{k-1}),\ \forall k \le l \le t$$

donde $v_{k-1}(\mathbf{z}_{k-1})$es la utilidad del bien que el consumidor obtuvo en el periodo; $k-1$, $\hat{\alpha}_{l-1}\mathbf{z}_{j-1}$ es la utilidad estimada en el periodo $l-1$ del bien x_{k-1} (que ya consumió), y $\hat{\alpha}_t \mathbf{z}_{k-1}$ es la utilidad estimada del mismo bien, x_{k-1}, en el periodo actual, *t*. Por ejemplo, si el consumidor eligió el bien x_0 en el primer periodo y obtuvo $v_0(\mathbf{z}_0)$, entonces la estimación de $\alpha_0, \hat{\alpha}_0$, debe cumplir la restricción que $\hat{\alpha}_0 \mathbf{z}_0 = v_0(\mathbf{z}_0)$. Si elige consumir un bien distinto en el segundo periodo y obtiene ahora $v_1(\mathbf{z}_1)$ entonces su nueva estimación del valor de sus preferencias, $\hat{\alpha}_1$, debe satisfacer dos restricciones. Primero, que $\hat{\alpha}_1 \mathbf{z}_1 = v_1(\mathbf{z}_1)$ y luego que $\hat{\alpha}_1 \mathbf{z}_0 = v_0(\mathbf{z}_0)$; esto último para cumplir con la condición de "no olvido". Al consumir otros bienes diferentes, el vector estimado de las preferencias debe satisfacer cada vez más restricciones (este hecho será utilizado para probar los distintos resultados de aprendizaje).

El tercer supuesto es que todos los bienes tienen un precio menor al ingreso disponible del individuo y, por consiguiente, la restricción presupuestal no limita el número de bienes que el consumidor puede adquirir (y que es igual al número total de bienes, *m*). El cuarto supuesto es que no existe desutilidad intertemporal, por lo que $U(v_t(\mathbf{z}_t)) = v_t(\mathbf{z}_t)$.[26] Finalmente, se supone que el rango de la matriz B es igual a: Rango (B) = Min {*r*, *m*}.

Es importante recordar que el vector $\mathbf{x}_t$ de tamaño $(m \times 1)$ contiene la cantidad de cada bien que el consumidor representativo decide consumir en el periodo *t*, y que tiene un 1 en la fila del bien elegido y ceros en todas las otras filas, pues se supone que el agente sólo consume una unidad de un bien en cada periodo. Con estos supuestos, el modelo planteado en (2) se puede reexpresar como:

$$\underset{\mathbf{x}_t}{MAX}\ E\sum_{t=0}^{T(D)} \alpha_t \mathbf{z}_t \tag{6}$$

sujeto a:

$$\hat{\alpha}_t \mathbf{z}_{k-1} = \hat{\alpha}_{l-1} \mathbf{z}_{k-1} = v_{k-1}\left(\mathbf{z}_{k-1}\right), \forall k \le l \le t$$

$$x_{jt}, \hat{\alpha}_{it} a_{it}\ z_{it} \ge 0, \forall j = 1,\dots, m;\ i = 1,\dots, r;\ \text{y con}$$

$$\mathbf{z}_t = \mathbf{B}\mathbf{x}_t$$

$$\text{Rango}\left(\mathbf{B}\right) = Min\ \left\{r, m\right\}$$

[26] Al final de esta sección se discuten las implicaciones de relajar el supuesto de que la restricción presupuestal no afecta la decisión de consumo. Asimismo, en las conclusiones se analizan brevemente algunos aspectos relacionados con la desutilidad intertemporal y sus posibles efectos en la optimización.

El sistema así planteado es una reproducción a escala de (2) ya que, con excepción de la ecuación de observación (2.1.1) y del hecho de que en (6) el Rango ($\mathbf{B}$) = Min {r, m}, se incluyen todos los elementos discutidos en la sección anterior. Es decir, se incluye un funcional que relaciona en forma lineal la función de valor con el vector de atributos. La función de valor es compensatoria e *independiente en preferencias* en el sentido fuerte del concepto. Asimismo, se incluye una ecuación de transición estocástica con *drift* que incorpora la propiedad markoviana de ajuste instantánea del conocimiento en el consumo y una variante de la ecuación lancasteriana de transformación $\mathbf{z}_t = \mathbf{Bx}_t$. La variante de esta ecuación proviene del hecho de que el Rango ($\mathbf{B}$) = Min {r, m}, o dicho de otra manera que $\mathbf{B}$ incluye sólo aquellos atributos que ayudan al consumidor a diferenciar los distintos bienes.

Lo interesante del nuevo sistema es que, al considerar las restricciones, se llega a la conclusión de que sólo en el caso en que $r < T(D)$ y $r < m$ (holgura temporal y de mercado) existe la posibilidad de llegar a una situación de aprendizaje completo; es decir, una situación en la que el consumidor puede estimar con exactitud sus preferencias. Esto se enuncia y demuestra más formalmente a continuación.

Proposición. **Con holgura temporal y de mercado, el consumidor adquiere suficientes bienes para completar su conocimiento sobre el vector de preferencias. La estabilización de sus preferencias ocurre a más tardar en el periodo $r - 1$, momento en el cual el consumidor habrá consumido un máximo de r bienes distintos, uno diferente en cada periodo.**

Demostración: Supóngase que existe holgura temporal y de mercado y que los bienes elegidos en los primeros r periodos son diferentes, esto es que $\mathbf{x}_0$? $\mathbf{x}_1$? ... ? $\mathbf{x}_{r-1}$. Ahora bien, dado que $r < m$, esto implica que el rango de $\mathbf{B}$ debe ser igual a r, con lo cual todas las filas de $\mathbf{B}$ así como toda la secuencia $\mathbf{Bx}_0$, $\mathbf{Bx}_1$, ... $\mathbf{Bx}_{r-1}$ o, equivalentemente, $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{z}_1$, ..., $\mathbf{z}_{r-1}$, son linealmente independientes. Asimismo, por el supuesto de "no olvido" debe cumplirse que $\hat{\alpha}_t \mathbf{z}_{k-1} = \hat{\alpha}_{l-1} \mathbf{z}_{k-1} = v_{k-1}(\mathbf{z}_{k-1})$, $\forall k \leq l \leq t$ y que $(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_{l-1})\mathbf{z}_{k-1} = \mathbf{0}$ o, de manera equivalente, que $(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_{l-1}) \perp \mathbf{z}_{k-1}$, $\forall k \leq l \leq t$. Esto significa que el vector de las diferencias en las estimaciones de las preferencias de cada periodo $(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_{l-1})$ es ortogonal al vector de atributos de todos los bienes que ya han sido consumidos.

Si suponemos ahora que existe un vector de diferencias $(\hat{\alpha}_t - \hat{\alpha}_{l-1})$ distinto de cero en el periodo r (lo cual quiere decir que las preferencias aún se están reestimando), entonces tendríamos que el vector de diferencias del periodo r sería ortogonal a r vectores linealmente independientes ($\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_{r-1}$) que corresponden a cada bien probado:

$$(\hat{\alpha}_r - \hat{\alpha}_{r-1})\perp \mathbf{z}_0,\ (\hat{\alpha}_r - \hat{\alpha}_{r-1})\perp \mathbf{z}_1, \ldots,\ (\hat{\alpha}_r - \hat{\alpha}_{r-1})\perp \mathbf{z}_{r-1}.$$

Sin embargo, como la dimensión del subespacio generado por $\{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1,...,\mathbf{z}_{r-1}\}$ es r, tendríamos en este caso una contradicción. Por lo tanto, los supuestos sólo se pueden cumplir simultáneamente si $(\hat{\alpha}_r - \hat{\alpha}_{r-1}) = \mathbf{0}$, con lo que el consumidor habría terminado de reestimar su vector de preferencias para el periodo $r-1$, después de consumir (como máximo) r bienes distintos, y contará en ese momento con una solución con aprendizaje completo para el vector de preferencias sobre los distintos atributos.[27]

Cuando hay holgura de mercado y restricción temporal ($T(D) < r$ # m) el número máximo de bienes que el consumidor podrá consumir será siempre menor al número de atributos, ya que éste sólo está en capacidad de elegir un bien por periodo. En consecuencia, aun cuando el consumidor pruebe bienes distintos en cada periodo, este número nunca rebasará al número de características. Con esto, se puede demostrar que el vector de diferencias puede ser distinto de cero en todos los periodos y, por lo mismo, es poco probable asegurar que las preferencias converjan a una solución única.[28] En este caso límite, el consumidor nunca podrá acumular suficiente información para satisfacer sus preferencias, sin importar su trayectoria óptima de consumo, lo cual redundará en un "aprendizaje subóptimo" en el equilibrio.

De igual manera, si hay holgura temporal combinada con una restricción de mercado, el número de bienes disponible siempre será menor al número de características y, por consiguiente, el consumidor nunca llegará a conocer el valor exacto de la preferencia por cada atributo. Sin embargo, hay que tener en mente que el consumidor está en condiciones de probar todos los bienes en el mercado (ya que $m < r$ #

[27] Alternativamente, puede pensarse en el problema como un sistema de ecuaciones lineales con r incógnitas, en el que existe una sola restricción en $t = 0$ y diferentes restricciones en cada periodo. Si hay menos restricciones que incógnitas, habrá un número infinito de soluciones para el vector. Cuando haya exactamente igual número de incógnitas que restricciones (es decir, cuando haya probado r bienes distintos), habrá una solución única y, para el caso en que haya más restricciones que incógnitas, no habrá una solución que sea consistente.

[28] En términos de un sistema de ecuaciones lineales, el número de restricciones es siempre menor al número de incógnitas, por lo que hay un número infinito de soluciones para el vector de preferencias.

T(*D*)) y, de esa manera, contar con toda la información posible en el periodo $m-1$. Por lo tanto, aunque en este tercer caso límite tampoco hay aprendizaje de las preferencias en el equilibrio, el consumidor puede llegar a encontrar el bien que maximiza su utilidad de entre los bienes que *existen* en el mercado.[29]

El caso más restrictivo es cuando hay, simultáneamente, restricciones temporal y de mercado. Para este caso límite, se puede asegurar que habrá aprendizaje subóptimo en el equilibrio porque el número de bienes que puede probar será siempre menor al número de características (éste es el elemento común entre el segundo y el tercer caso recién descritos). Sin embargo, dependiendo de que la restricción sea más fuerte ($T(D) < m$ o $m < T(D)$), el consumidor estará en posibilidad de consumir todos los bienes (como cuando existe holgura temporal y restricción de mercado) o de no hacerlo (como en el caso límite con restricción temporal y holgura de mercado).

En conclusión: sólo en el caso particular en que exista holgura temporal y de mercado es posible que el consumidor llegue a consumir suficientes bienes como para poder determinar su vector de preferencias (lo que implica que el número crítico de bienes distintos debe ser igual al número de atributos, *r*). Pero la decisión de consumir *r* bienes distintos depende de la evaluación que haga el consumidor sobre los bienes que no ha probado en cada periodo, y esto no puede definirse *a priori*. Para ello es necesario introducir el concepto de martingala a fin de ilustrar claramente cómo el individuo decide la trayectoria óptima de consumo.

III.3. Martingalas y trayectorias óptimas de consumo

En general, una martingala es un proceso estocástico que se fundamenta sobre la idea de un "juego justo".[30] En nuestro caso particular, el uso de las martingalas se explica por la necesidad de encontrar una regla de control (o de *optimal stopping*) para situaciones de aprendizaje donde las decisiones de consumo constituyen en sí un proceso estocástico. La existencia de equilibrios múltiples con FUMAT que incluyen información incompleta, presenta distintas reglas de control

[29] En las conclusiones se describe el tipo de bienes que se esperan en cada caso límite.

[30] Véanse Williams (1979) para una exposición formal sobre la teoría de las martingalas, y el excelente libro de Masanao Aoki (1989) para la aplicación de las martingalas a problemas de optimización estocásticos.

que son más inteligibles en el marco de un juego justo, como el descrito por las martingalas. Debido a esto, procederemos a analizar las situaciones en las que el consumidor puede experimentar equilibrios múltiples (como es el caso de holgura temporal y de mercado), considerando a las martingalas como los procesos estocásticos que definen el equilibrio del consumidor en términos de su regla de *optimal stopping*.

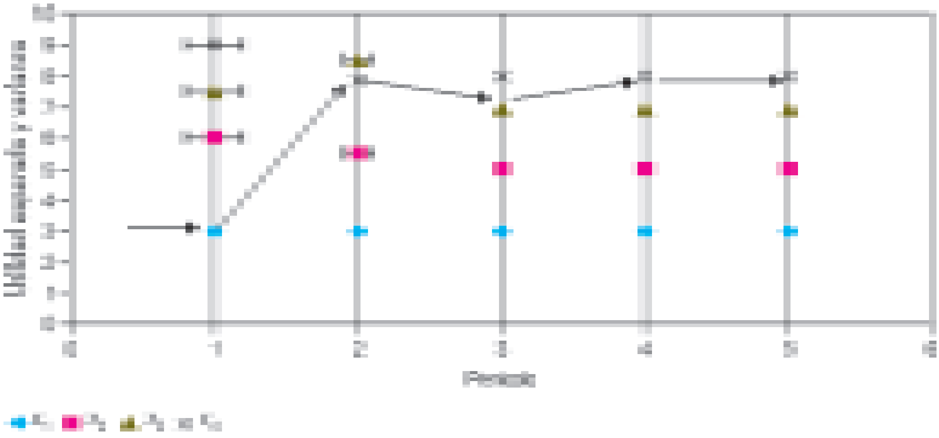
En el apartado anterior quedó claro que sólo cuando r # $T(D)$ y r # m puede existir aprendizaje completo. No obstante, la restricción no garantiza que el consumidor tenga que probar todos los bienes distintos en su afán de conocer completamente el valor de su FUMAT.[31] Para comprender mejor esto consideremos, para empezar, que existe una submartingala (definida sobre la utilidad de los bienes) en los primeros $r-1$ periodos; esto significa que la utilidad esperada del siguiente bien es mayor que la utilidad de los bienes que ya ha probado y, entonces, como parte de su estrategia óptima de consumo, el individuo elegirá consumir r bienes distintos, porque así es congruente con su estrategia de maximización de la utilidad esperada. Por otra parte, si existe una martingala o una supermartingala en cualquier periodo $t < r-1$, el consumidor decidirá parar su proceso de experimentación de bienes nuevos antes de probar r bienes, porque no considera que la experimentación de nuevos bienes lo lleve a maximizar su utilidad. En este caso, como parte de su estrategia óptima de consumo, no llegará a conocer suficientes bienes, r, como para encontrar los valores de su vector de preferencias, por lo que estará en una situación de aprendizaje subóptimo.

Entonces, sólo en el caso en que su aprendizaje defina una martingala en el periodo r, el consumidor estará en una situación de aprendizaje completo. Esta situación se ejemplifica en el diagrama 1, en el que se muestra una trayectoria posible para un ejemplo con cuatro bienes, cinco periodos de tiempo y tres atributos.

En este caso, el consumidor elige inicialmente consumir x_1 en el primer periodo. Dada la información adquirida con ese bien, evalúa en consecuencia la utilidad esperada de los otros bienes (la varianza de la utilidad esperada se representa mediante las líneas horizontales). Ya que x_4 tiene la utilidad esperada máxima, el consumidor decide consumir este bien en el segundo periodo, obteniendo una cantidad de utili-

[31] Este resultado va en el mismo sentido que el presentado por Archibald y Elliott (1989), en que la experiencia del mercado puede no erradicar las diferencias entre las percepciones y los valores reales, por lo que los individuos no llegarán a un aprendizaje completo.

Diagrama 1

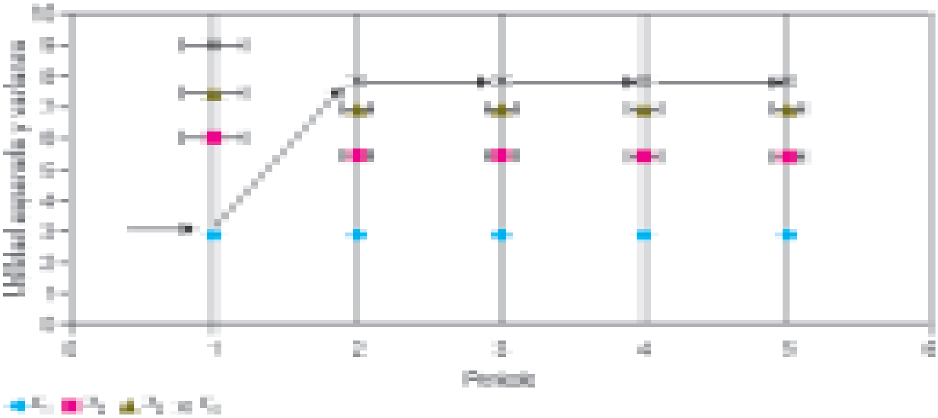


dad que es distinta de la cantidad esperada por un error de percepción. En el tercer periodo, el consumidor recalcula las utilidades esperadas de los bienes que no ha probado y decide consumir x_3, dado que su utilidad esperada es mayor a la utilidad "probada" de x_1 y x_4 (nótese que al adquirir más información, la varianza de las preferencias se ha reducido, y por ende también la varianza de la utilidad esperada). Tras consumir tres bienes, el consumidor cuenta con suficiente información para conocer exactamente sus preferencias y la utilidad de aquellos bienes como x_2 que nunca ha probado (pues el problema incluye sólo tres atributos). Finalmente, el consumidor cambia a x_4 y consume este bien permanentemente, debido a que maximiza su utilidad.

Por otra parte, si el proceso de aprendizaje describe una martingala o una supermartingala antes del periodo r, el consumidor se encontrará en una situación de aprendizaje subóptimo, pues éste consume menos de r bienes distintos. El diagrama 2 ejemplifica esta situación, una vez más para cuatro bienes, cinco periodos de tiempo y tres atributos.

En este ejemplo, el consumidor elige x_1 aleatoriamente en el primer periodo y, con la información adquirida, x_4 en el segundo periodo, debido a que este bien es el que maximiza su utilidad esperada. Sin embargo, con la información del bien consumido en $t = 2$, la utilidad derivada de x_4 es mayor a la utilidad reportada por x_1 y mayor a la

Diagrama 2



utilidad esperada de x_2 y x_3, por lo que x_4 decide consumir el bien en todos los periodos subsecuentes. Mientras que en el ejemplo anterior el consumidor obtiene sus preferencias como parte del proceso de maximización, en este caso la regla de decisión conduce a un aprendizaje subóptimo, con varianza positiva de las preferencias para los bienes que no ha consumido.

Mientras que en el caso de holgura temporal y de mercado, la existencia de una martingala o una submartingala en cierto periodo afectan la trayectoria óptima de consumo y el resultado final de aprendizaje, en los otros tres casos límite las restricciones llevan a aprendizaje subóptimo en las preferencias con varianza positiva sobre la FUMAT en el último periodo de consumo, sin importar la trayectoria de consumo. En el caso de holgura de mercado y restricción temporal, esto se debe a que el consumidor no puede elegir suficientes bienes diferentes para caracterizar los parámetros de su FUMAT, debido a la alta durabilidad de esos bienes (eso es válido aun cuando existan suficientes bienes en el mercado que permitan al consumidor llegar a la situación de aprendizaje completo). Por lo tanto, la existencia o no de una martingala no afecta realmente el aprendizaje posible, aunque puede limitarlo aún más.

El diagrama 3 muestra esta situación para un ejemplo con cuatro bienes, dos periodos de tiempo y tres atributos.

En el diagrama 3, el consumidor inicia una vez más eligiendo aleatoriamente a x_1. Con la información del consumo de este bien, calcula las utilidades esperadas de los bienes restantes en el mercado y elige

Diagrama 3

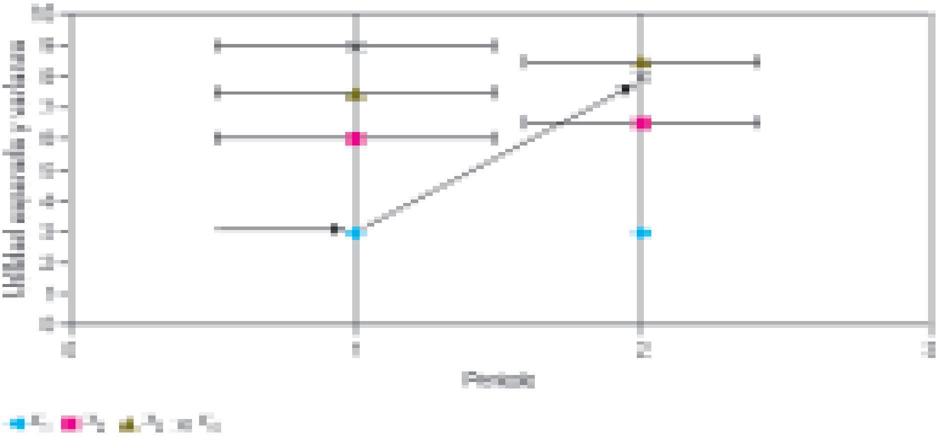
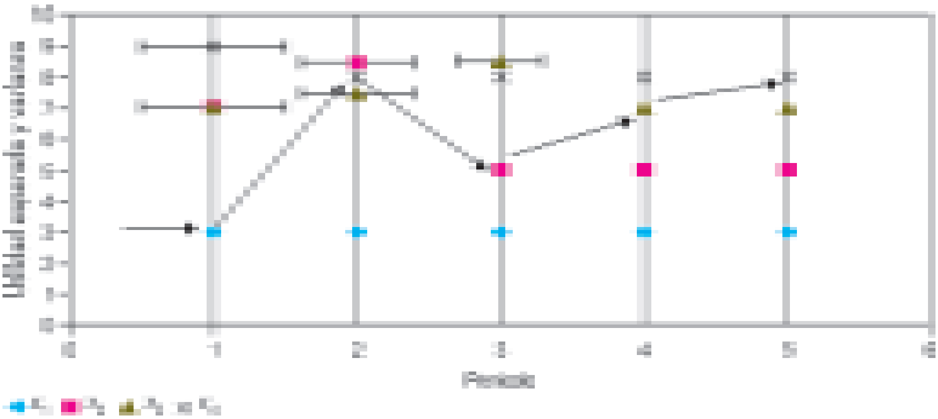


Diagrama 4



consumir en el segundo periodo a x_4. Con la nueva información, el consumidor decide consumir x_3 en $t = 3$. Sin embargo, la limitación temporal, $T(D) = 2$, no permite al individuo seguir consumiendo, por lo que su consumo no llega a estabilizarse y su aprendizaje es subóptimo.

Si existe holgura temporal y restricción de mercado, existirá también aprendizaje subóptimo en las preferencias con varianza positiva

Cuadro 2. Conclusiones del modelo simplificado

<table>
<tr><th></th><th>Holgura temporal
(T(D) ≥ r)</th><th colspan="2">Restricción temporal
(T(D) < r)</th></tr>
<tr><td>Holgura de mercado
($m \geq r$)</td><td>Aprendizaje completo si existe una submartingala en los primeros $r-1$ periodos (por lo que se prueban r bienes distintos).

Aprendizaje subóptimo por la regla de maximización de la utilidad esperada y la existencia de una martingala o una supermartingala en $t < r-1$.</td><td colspan="2">Aprendizaje subóptimo debido a la escasez de tiempo de consumo, resultado de la alta durabilidad.</td></tr>
<tr><td>Restricción de mercado
($m < r$)</td><td>Aprendizaje subóptimo por complejidad relativa del producto con respecto al mercado.

Si existe una submartingala en los primeros $m-1$ periodos, el consumidor prueba todos los bienes existentes. Si existe una martingala o una submartingala en algún $t < m-1$ se trunca la experimentación antes de probar m bienes.</td><td colspan="2">Aprendizaje subóptimo.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Si $m > T(D)$, la restricción es equivalente al caso con holgura temporal y restricción de mercado.</td><td>Si $T(D) > m$, la restricción es equivalente al caso con restricción temporal y holgura de mercado.</td></tr>
</table>

sobre la FUMAT en el último periodo de consumo, sin importar la trayectoria de consumo. Intuitivamente, este resultado existe porque la complejidad del producto es más grande que su diversificación, de aquí que el consumidor no tenga la oportunidad de probar suficientes bienes para decidir cuáles son las preferencias sobre los atributos. No obstante que existe varianza sobre las preferencias, aquí puede presentarse una situación curiosa en la que el consumidor no tenga incertidumbre sobre los bienes existentes (pues los pudo haber probado todos), sino sobre las mezclas nuevas que pudieran aparecer en el mercado, como se ilustra con el diagrama 4.

En este ejemplo con cuatro bienes, seis atributos y cinco periodos de tiempo, el consumidor escoge x_1 aleatoriamente en el primer periodo. Posteriormente, elige consumir x_4, x_2, y x_3 en los siguientes periodos, por ser estos los bienes que en cada periodo maximizan su utilidad esperada, dada su información disponible. Por lo tanto, para el cuarto periodo ya no existe incertidumbre acerca de los bienes existentes en el mercado, pues los ha probado todos, aunque existe todavía varianza sobre sus preferencias (la cual se haría evidente una vez que aparecieran nuevos bienes en los periodos subsecuentes). Por supuesto, es posible que la martingala se presente en $t < m$, en cuyo caso habría aprendizaje subóptimo y la utilidad de alguno de los bienes en el mercado sería todavía más incierta.

Si existe restricción temporal y de mercado, existirá entonces aprendizaje subóptimo en las preferencias con varianza positiva sobre la FUMAT en el último periodo de consumo, sin importar la trayectoria de consumo. Este cuarto caso límite, como se mencionó, es el más restrictivo de todos pues hay menos periodos de consumo y también menos productos que atributos en el grupo de bienes **B**. Nótese que aquí, para una tecnología de consumo dada (*m* y *r* en la matriz **B**), la decisión óptima de consumo cambiará con el número de periodos, por lo que es importante saber si *m* es mayor o menor que *T(D)*.

El cuadro 2 presenta un resumen de estos resultados.

III.4. Efectos ingreso y precio

En el sistema (6) un aumento en los precios produce dos efectos. El primero es el efecto-precio, presente también en las funciones de utilidad de la teoría tradicional. Este efecto existe porque el precio es un atributo más en la matriz de características **B** y, por lo tanto, uno de los parámetros de la función de preferencias mide su importancia en la FUMAT. En el caso de los bienes normales se espera que, al aumentar el precio de un bien, el consumidor obtenga mayor utilidad de una mezcla de bienes con idénticos niveles en los otros atributos si compra el bien con precio menor. Sin embargo, es importante notar que la mayoría de los bienes no difiere en una sola característica sino en un grupo de ellas. Esto significa que al consumidor le será posible diferenciar el efecto del cambio en los precios de los otros atributos hasta conocer todos los parámetros de la función de utilidad de los atributos que están cambiando.

Adicionalmente, si aumenta el precio de un bien y los de los otros permanecen constantes, la utilidad (ya sea cierta o esperada) de ese bien seguramente disminuirá, pero no así su demanda (a menos que ésta se reduzca a tal grado que la utilidad sea mayor para ese bien que para cualquier otro en el grupo de bienes). Por lo tanto, la demanda puede ser discontinua con respecto al precio y su primera derivada no será siempre negativa en algunos intervalos.

El segundo efecto-precio no existe en la teoría tradicional, pues funciona mediante una modificación en la tecnología de consumo. Ya que el consumidor tiene un ingreso máximo que ha elegido gastar en cada periodo, puede haber bienes con un precio más alto que el ingreso disponible.[32] En consecuencia, aunque existan m bienes en el mercado, el número de bienes asequibles para el consumidor puede ser menor o igual a m. En general, entre mayores sean los precios (o menor el ingreso), también será menor el número de bienes que el consumidor puede realmente adquirir.

En vista de estas relaciones, puede adelantarse el efecto de los cambios en el ingreso y en los precios sobre el aprendizaje y las trayectorias de consumo de los consumidores. En general, cuando hay cambios en el ingreso real debido a modificaciones en los precios, puede presentarse la situación de que individuos que eligen sobre el mismo grupo de bienes tengan procesos de aprendizaje distintos, dependiendo de los impactos de los precios sobre la mezcla de sus atributos.

Conclusiones

El documento pone de relieve que las FUMAT constituyen una herramienta poderosa para ordenar el espacio de bienes en un marco dinámico y con información incompleta. Pero estas ventajas no son gratuitas: requieren una sofisticación matemática que en muchos casos im-

[32] Es este segundo efecto ingreso (precios) el que se dejó a un lado al estudiar los casos límite.

pide encontrar una solución exacta a los problemas de optimización, como el planteado en la segunda sección.

No obstante estas dificultades, el documento desarrolla un modelo dinámico con información incompleta en el que se explican con detalle cada uno de sus elementos constitutivos. Como prueba de las implicaciones que puede tener este tipo de modelo, la tercera sección presenta un modelo lineal, a modo de ejemplo, en el que se discuten resultados muy sugerentes. En ese modelo, el consumidor elige probar suficientes bienes que le permitan tener la información necesaria para determinar los parámetros de su FUMAT. El caso extremo de aprendizaje completo está limitado a situaciones en las que la diversificación de productos es mayor que el número de atributos ($m \geq r$) y los periodos son más grandes que los atributos ($T(D) \geq r$). Es claro que existen muchos productos que no encajan dentro de estas condiciones de holgura temporal y de mercado debido a que presentan distintos niveles de complejidad. En el cuadro 1 se divide el espacio de bienes en cuatro grupos distintos, de acuerdo con las restricciones temporales y de mercado, y se ejemplifican los tipos de bienes que se esperan en cada uno de estos grupos.

El modelo lineal sugiere que solamente puede haber aprendizaje completo en bienes de consumo relativamente sencillos, como los alimentos, en los que existe mucha variedad y su consumo es continuo. En los casos en que existe una restricción temporal y/o de mercado, el aprendizaje es, en general, subóptimo. Éstos incluyen bienes con alta durabilidad, como casas o muebles y artículos que son complejos en relación con la diversificación de mercado. Solamente en bienes de baja durabilidad y alta diversificación, en los que además existe una submartingala en su utilidad durante los primeros $r-1$ periodos, el individuo opta por consumir suficientes bienes como para garantizar un aprendizaje completo; si hay una supermartingala o una martingala en cualquiera de esos periodos, la experimentación se trunca y el aprendizaje de equilibrio es incompleto. El cuadro 2 resume los distintos casos límite derivados del modelo lineal.

La teoría tradicional no discute la validez de las conjeturas que se desprenden del análisis del cuadro 2, esto es: que distintos grupos de

[33] Entre las excepciones, cabe destacar a Young (1991) y Bala y Goyal (1995). El primero presenta un modelo intertemporal con aprendizaje en el que se modelan las trayectorias de consumo (aunque no presenta conclusiones sobre diferencias entre bienes por no utilizar FUMAT). El segundo es una "teoría de aprendizaje con agentes heterogéneos" que usa conceptos simila-

bienes son percibidos de manera distinta por el consumidor, ya sea por su complejidad o por su costo de oportunidad temporal. Tampoco hay una presunción de que cambios en estas dos variables generen trayectorias de consumo distintas o de que exista un proceso de aprendizaje en las preferencias del consumidor. En general, la teoría tradicional ha preferido obviar estas consideraciones, con excepción de algunas notables excepciones.[33] El modelo intertemporal aquí presentado apoya estas conjeturas con una proposición y una tipología presentadas en la sección III.

Cabe advertir que existe un fenómeno en las tecnologías de consumo que aquí no se incluye, y que puede modificar las conclusiones del documento con respecto al aprendizaje y a la estabilización de preferencias. Nos referimos al hecho de que si los grupos de bienes intrínsecamente similares comparten algunas de las características, entonces el aprendizaje sobre un grupo de bienes puede proveer información al consumir bienes con algunas características en común. Si el consumidor está comprando simultáneamente distintos grupos de bienes, la existencia de un traslape de características puede ser un elemento clave para acelerar el aprendizaje sobre las preferencias de los consumidores. En general, se espera que el aprendizaje para un grupo con cierta mezcla de atributos sea mayor en la medida en que haya un traslape de características mayor con grupos de bienes caracterizados por su holgura temporal y de mercado.[34]

Como se mencionó en el documento, no es necesario agregar una condición de desutilidad intertemporal dentro de la maximización, en virtud de que el número de periodos es finito. No obstante, la existencia de desutilidad en el consumo puede afectar los casos límites del modelo, particularmente si esta desutilidad no se produce por el consumo en general sino por la *compra del mismo bien en varias ocasiones*. Se espera que la trayectoria de consumo cambie al incluir este

res a las martingalas para así encontrar las condiciones necesarias en las que las decisiones de los agentes se desarrollan bajo aprendizaje completo.

[34] La información sobre otros grupos podría modelarse como un choque aleatorio positivo sobre el conjunto de información del grupo en que busca optimizar su consumo. El hecho de suponer que el choque sea positivo da sustento a la conjetura de que el traslape de atributos aumenta la posibilidad de llegar a una situación de aprendizaje completo. Por otro lado, se espera que con estos choques se impida la existencia de una martingala en la utilidad (al menos hasta llegar a la situación de aprendizaje completo), pues en el *interim* las preferencias pueden cambiar sin que el consumidor haya probado bienes distintos. Esto provocaría una dinámica adicional dentro del modelo que podría llevar a cambios en la elección de consumo sobre un mismo grupo de bienes.

supuesto, pues existe un momento en el que la utilidad (esperada o cierta) de los otros bienes será mayor a aquella del bien que se ha consumido en varias ocasiones; lo cual introduce una dinámica adicional en el modelo. Además, se espera que el número de bienes consumido dentro de la trayectoria óptima sea mayor o igual al que se consume sin desutilidad intertemporal debido a que crea un incentivo a consumir bienes distintos. Esto implica, por lo tanto, un aumento en el número óptimo de "paquetes" de información por parte del consumidor.

Dentro del modelo planteado, conviene diferenciar los elementos que son tomados de otros trabajos de los que son nuevos. La tecnología de consumo, representada por la matriz **B**, y la función de utilidad lineal con múltiples atributos provienen del trabajo de Lancaster (1966), aunque existen muchos otros autores que han utilizado este tipo de FUMAT. La introducción de la incertidumbre, vista como desconocimiento inicial de los parámetros en la FUMAT, es un elemento nuevo, como lo es también la incorporación simultánea del tiempo. Adicionalmente, la forma en que se modela el tiempo como una función del costo temporal de consumo en un modelo con FUMAT parece ser una contribución original de este trabajo.

La combinación de todos estos elementos, dentro de un modelo con FUMAT, varios periodos e información incompleta, arroja resultados interesantes para entender el aprendizaje de las preferencias y las trayectorias de consumo. Estos resultados permiten la división del espacio de bienes de acuerdo con restricciones temporales y de mercado, y lleva a pronósticos de aprendizaje distintos en cada grupo, que no han sido analizados hasta ahora en el cuerpo de la literatura sobre FUMAT.

Referencias bibliográficas

Aoki, Masanao (1989), *Optimization of Stochastic Systems: Topics in Discrete-Time Dynamics*, Academic Press, Londres.

Archibald, G.C. y G. Rosenblueth (1975), "The 'New' Theory of Consumer Demand", *Quarterly Journal of Economics*, vol. LXXXIX.

Archibald, Robert B. y Catherine S. Elliot (1989), "Trial-and-Error Learning and Economic Models", *KYKLOS*, Vol. XLII.

Arkin, Vadim I. e I.V. Evstigneev (1987), *Stochastic Models of Control*

and Economic Dynamics, Academic Press, Londres.
Bala, Venkatesh y Sanjeev Goyal (1995), "A Theory of Learning with Heterogeneous Agents", *International Economic Review*, vol. XXXVI.
Baumol, William J. (1967), "Calculation of Optimal Product and Retailer Characteristics: The Abstract Product Approach", *The Journal of Political Economy*, vol. LXXV.
Beckmann, Martin J. (1968), *Dynamic Programming of Economic Decisions*, Springer, Nueva York.
Bell, David E., Howard Raiffa y Amos Tversky (eds.) (1988), *Decision Making: Descriptive, Normative, and Prescriptive Interactions*, Cambridge University Press, Cambridge.
Carreón, V. (1998), "A Quality-Adjusted Price and Gasoline", Documento de Trabajo 130, División de Economía, CIDE.
Cyert, Richard M. y Morris H. de Groot (1975), "Adaptive Utility", en Richard H. Day y Theodore Groves (eds.), *Adaptive Economic Models*, Academic Press, Londres.
Deaton, Angus y John Muellbauer (1980), *Economics and Consumer Behaviour*, Cambridge University Press, Cambridge.
Dixit, A.K. y J.E. Stiglitz (1977), "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *The American Economic Review*, vol. LXVII.
Farber, Henry S. y Robert Gibbons (1991), "Learning and Wage Dynamics", NBER Working Paper #3764.
Feller, William (1985), *Teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Limusa, México.
Fischer, Gregory W. (1975), "Experimental Applications of Multi-Attribute Utility Models", en Dirk Wendt y Charles Vlek (eds.), *Utility, Probability, and Human Decision Making*, D. Reidel, Dordretch.
Gale, Douglas y Robert W. Rosenthal (1994), "Price and Quality Cycles for Experience Goods", *RAND Journal of Economics*, vol. XXV.
Harvey, John (1996), "Heuristic Judgement Theory", *Post Keynesian Thought Internet Seminar*.
Hay, Donald A. y Derek J. Morris (1991), *Industrial Economics and Organization: Theory and Evidence*, Oxford University Press, Oxford.
Humphreys, Patrick y Alison Humphreys (1975), "An Investigation of Subjective Preference Orderings for Multi-attributed Alternatives", en Dirk Wendt y Charles Vlek (eds.), *Utility, Probability, and Human Decision Making*, D. Reidel, Dordretch.
Isaacson, Dean L. y Richard W. Madsen (1976), *Markov Chains, Theory*

and Applications, John Wiley and Sons, Nueva York.
Jacquemin, A. (1982), *Economía industrial*, Hispanoeuropea, Barcelona.
Jonard, Nicholas y Murat Yildizglu (1997), "Technological Diversity in an Evolutionary Industry Model with Localized Learning and Network Externalities", mimeo., Université Louis Pasteur, Estrasburgo.
Keeney, Ralph L. y Howard Raiffa (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, John Wiley and Sons, Nueva York.
Kolbin, Viacheslav V. (1977), *Stochastic Programming*, D. Reidel, Dordretch.
Lancaster, Kelvin J. (1966), "A New Approach to Consumer Theory", *The Journal of Political Economy*, vol. LXXVI.
——— (1975), "Socially Optimal Product Differentiation", *The American Economic Review*, vol. LXV.
——— (1991), *Modern Consumer Theory*, Edward Elgar, Aldershot.
Malliaris, A. G. y W. A. Brock (1981), *Stochastic Methods in Economics and Finance*, North-Holland, Amsterdam.
Nelson, Phillip (1970), "Information and Consumer Behavior", *The Journal of Political Economy*, vol. LXXVIII.
Nordhaus (1997), "Traditional Productivity Estimates are Asleep at the (Technological) Switch", *The Econonic Journal*, 107.
Ramírez, J.C. y J. Goddard (1998), "Optimización de un modelo de aprendizaje utilizando funciones de utilidad con múltiples atributos", Documento de Trabajo 125, División de Economía, CIDE.
Ross, Sheldon (1996), *Stochastic Processes*, John Wiley and Sons, Nueva York.
Von Winterfeldt, Detlof y Gregory W. Fischer (1975), "Multi-Attribute Utility Theory: Models and Assessment Procedure", en Dirk Wendt Wendt y Charles Vlek (eds.), *Utility, Probability, and Human Decision Making*, D. Reidel, Dordretch.
Wilde, Louis L. (1981), "Information Costs, Duration of Search, and Turnover: Theory and Applications", *The Journal of Political Economy*, vol. LXXXIX.
Williams, David (1979), *Diffusions, Markov Processes, and Martingales*, John Wiley and Sons, Nueva York.
Young, Alwyn (1991), "Invention and Bounded Learning by Doing", *NBER Working Paper #3712.*